TD$_{10}$ – Fonctions vectorielles, Courbes

Exercice 1 ★

Soit I un intervalle, E un espace vectoriel euclidien et $f : I \longrightarrow E$ dérivable. On suppose de plus que f ne s'annule pas et on pose, pour tout $t \in I$, $g(t) = \|f(t)\|$. Démontrer que g est dérivable et donner une expression de g'.

Exercice 2 ★★

Soit V une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $t \mapsto \|V(t)\|$ soit constante.

1. Montrer que, pour tout réel t, $V(t)$ et $V'(t)$ sont orthogonaux.
2. Que dire de la réciproque ?

Exercice 3 ★

Soit $A(-1, 2)$ et $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$. On note D la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$.

Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de D.

Exercice 4 ★

On considère le cercle $\mathcal{C}$ défini par l'équation $(x-1)^2 + (y+1)^2 = R^2$, où $R > 0$. Donner un paramétrage de ce cercle.

Exercice 5 ★

Soit $M(x, y)$ un point du plan et D la droite d'équation $2x + 3y = 5$

Déterminer le projeté orthogonal de M sur D

Exercice 6 ★★★

On considère la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x(t) &= \cos(t) + \cos(t)^2 \\ y(t) &= \sin(t) + \cos(t)\sin(t) \end{cases}$

1. Déterminer les éventuelles réductions du domaine d'étude et leurs conséquences sur le support de la courbe
2. Étudier les variations de x et y et dresser le tableau des variations conjointes
3. Rechercher les éventuelles asymptotes ou directions asymptotiques
4. Étudier les éventuels points singuliers et leurs natures
5. Tracer une allure du support.

Exercice 7 ★★★

Étudier et tracer les courbes paramétrées par ($t \in I$ où I est à déterminer) :

a) $\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+1}{2t} \\ y(t) = \dfrac{2t-1}{t^2} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\ln|t|}{t-1} \\ y(t) = \ln\left|t + \dfrac{1}{t}\right| \end{cases}$ f) $\begin{cases} x(t) = \cos\left(\dfrac{3t}{2}\right) \\ y(t) = 2\sin(t) + \cos(2t) \end{cases}$

Pour le a) et le b), on déterminera les points doubles.

Exercice 8 ★★

On considère la courbe Γ donné par $M(t) : \begin{cases} x(t) = \arccos(\cos t) \\ y(t) = \arcsin(\sin t) \end{cases}$

Comment passe-t-on du point $M(t)$ au point $M(t+2\pi)$? au point $M(-t)$? au point $M(\pi - t)$? Construire alors Γ.

Exercice 9 ★★★

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on se donne les deux courbes (Γ_1) :

$$\begin{cases} x(t) = 5\cos t - \cos 5t \\ y(t) = 5\sin t - \sin 5t \end{cases} \text{ et } (\Gamma_2) : \begin{cases} x(\theta) = 4\cos\left(\dfrac{2\theta}{3}\right)\cos(\theta) \\ y(\theta) = 4\cos\left(\dfrac{2\theta}{3}\right)\sin(\theta) \end{cases}.$$

1. Étudier (Γ_1).
2. Montrer que lorsque $M(t)$ décrit (Γ_1), le projeté orthogonal $H(t)$ de O sur la normale à (Γ_1) en $M(t)$ décrit la courbe (Γ_2).

Exercice 10 ★★★

Soit Γ la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t-t^3}{1+t^2} \end{cases}$

1. Construire Γ.
2. Former une équation cartésienne de Γ.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de Γ, de paramètres t_1, t_2 et t_3 soient alignés.

Exercice 11 ★★★★

Soit Γ la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2t \end{cases}$ On appelle *podaire de Γ par rapport à un point P du plan* l'ensemble des projetés orthogonaux sur les tangentes à Γ.

1. Donner une équation cartésienne de Γ et la tracer
2. Soit $M(t)$ un point de Γ. Déterminer une équation de la tangente à Γ en M
3. Soit F le point de coordonnées $(1, 0)$. Vérifier que la podaire de Γ par rapport à F est une droite.
4. Déterminer et tracer la podaire γ de Γ par rapport à l'origine $O(0, 0)$.

Exercices issus d'oraux

Exercice 12 ★★

(*Oral 2017*)

Soit $\mathcal{C}$ paramétrée par $x(t) = \sin^2(t)$ et $y(t) = (1+\cos(t))\sin(t)$

1. Étudier et tracer $\mathcal{C}$
2. Soit M_1 de coordonnées $(x(t), y(t))$ et M_2 de coordonnées $(x(t+\pi), y(t+\pi))$. Montrer que $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont orthogonaux
3. Donner une équation paramétrée $(X(t), Y(t))$ du lieu (D) des milieux des segments $[M_1M_2]$
4. Simplifier $\left(X(t) - \dfrac{1}{2}\right)^2 + Y(t)^2$ et en déduire une équation cartésienne de D ainsi que sa nature.

Exercice 13 ★★★

(*Oral 2017*)

Soit $\mathcal{P}$ paramétrée par $x(t) = \dfrac{t^2}{2}$ et $y(t) = t$

1. Tracer $\mathcal{P}$
2. Déterminer une équation de la tangente T_t à $\mathcal{P}$ au point de paramètre t.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $A(0,1)$ sur cette tangente. On le notera $N(t)$
4. Étudier le comportement asymptotique de la courbe décrite par $N(t)$

Exercice 14 ★★★

(*Oral 2018*)

Soit Γ la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \ln\left(\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)\right) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de Γ
2. Étudier les points stationnaires
3. Étudier les branches infinies
4. Tracer l'allure de la courbe.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

On a, pour $t \in I$, $\|f(t)\| = \sqrt{\langle f(t), f(t)\rangle}$.

Comme f est dérivable, $t \mapsto \langle f(t), f(t)\rangle$ l'est également.

Comme f ne s'annule pas on a

$$\forall t \in I, \qquad \langle f(t), f(t)\rangle > 0$$

Ainsi, comme la fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$, g est bien dérivable sur I.

Pour $t \in I$ on a

$$g'(t) = \frac{\langle f'(t), f(t)\rangle + \langle f(t), f'(t)\rangle}{2\sqrt{\langle f(t), f(t)\rangle}} = \frac{\langle f(t), f'(t)\rangle}{\|f(t)\|}$$

Corrigé de l'exercice 2

1. Soit $K \geqslant 0$ tel que, pour tout $t \in I$, $\|V(t)\| = K$.
   - Si $K = 0$ alors, pour tout $t \in I$, $V(t) = 0_{\mathbb{R}^3}$, ainsi $V(t)$ et $V'(t)$ sont bien orthogonaux.
   - Si $K \neq 0$ alors V ne s'annule jamais.

     D'après la question précédente $g : t \mapsto \|V(t)\|$ est dérivable et

     $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g'(t) = \frac{\langle V(t), V'(t)\rangle}{\|V(t)\|}$$

     Or g est constante donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = 0$, d'où, pour tout $t \in I$, $\langle V(t), V'(t)\rangle = 0$
2. Supposons que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $V(t)$ et $V'(t)$ sont orthogonaux.

   Soit $f : t \mapsto \|V(t)\|^2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$ on a $f'(t) = 2\langle V(t), V'(t)\rangle = 0$.

   Ainsi f est constante et donc la fonction $t \mapsto \|V(t)\|$ est constante.

Corrigé de l'exercice 3

Le vecteur $n = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ est normal à D. Ainsi D a une équation de la forme $x + 3y = C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Puisque $A(-1, 2) \in D$ on a $C = -1 + 3 \times 2 = 5$.

D est donc la droite d'équation $x + 3y = 5$.

D est la droite passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, une représentation paramétrique est alors

$$D = \{(-1 + 3t, 2 - t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$

Corrigé de l'exercice 4

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1, -1)$ et de rayon R. Un paramétrage de ce cercle est

$$\mathcal{C} = \{(1 + R\cos(t), -1 + R\sin(t))\ ,\ t \in [0, 2\pi]\}$$

Corrigé de l'exercice 5

Le projeté orthogonal de $M(x, y)$ sur D est l'unique point $N \in D$ tel que les droite (MN) et D soient perpendiculaires.

D est dirigée par $3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ et passe par le point de coordonnées $(1, 1)$ On a donc $D = \{(1 + 3t, 1 - 2t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$. Notons $N(t)$ le point de coordonnées $(1 + 3t, 1 - 2t)$

Il nous faut donc trouver t tel que $\overrightarrow{MN(t)}$ et $3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ soient orthogonaux.

Or $\langle \overrightarrow{MN(t)}, 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} \rangle = 3(x-1-3t)-2(y-1+2t) = 3x-3-9t-2y+2-4t = 3x-2y-1-13t$

Ainsi le projeté orthogonal de M sur D est $N\left(\dfrac{3x-2y-1}{13}\right)$, i.e le point de coordonnées $\left(\dfrac{10+9x-6y}{13}, \dfrac{15-6x+4y}{13}\right)$.

Corrigé de l'exercice 6

1. x et y sont périodiques de période 2π, ainsi on peut limiter notre étude à un intervalle de largeur 2π. Le support complet de la courbe sera identique à son support sur cet intervalle.

   De plus x est paire et y est impaire, on va alors se limiter à une étude sur $[0, \pi]$. On obtiendra le support de la courbe sur $[-\pi, 0]$ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.
2. x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$x'(t) = -\sin(t) - 2\cos(t)\sin(t) = -\sin(t)(1 + 2\cos(t))$$
$$y'(t) = \cos(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos(t)^2 + \cos(t) - 1 = (2\cos(t) - 1)(\cos(t) + 1)$$

   On en déduit le tableau des variations conjointes

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0		$-$		0	$+$	0
$x(t)$	2	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0		$-$		0

3. La courbe n'a pas de branches infinies.
4. On a un point singulier au paramètre π.

   Pour $t \in R$, notons $s = t - \pi$, on a alors

$$\begin{aligned}
x(\pi+s) &= \cos(\pi+s) + \cos(\pi+s)^2 \\
&= -\cos(s) + \cos(s)^2 \\
&\underset{s\to 0}{=} -1 + \frac{s^2}{2} + o(s^3) + \left(1 - \frac{s^2}{2} + o(s^3)\right)^2 \\
&\underset{s\to 0}{=} -1 + \frac{s^2}{2} + 1 - s^2 + o(s^3) \\
&\underset{s\to 0}{=} -\frac{s^2}{2} + o(s^3)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
y(\pi+s) &= \sin(\pi+s) + \frac{\sin(2\pi+2s)}{2} \\
&- \sin(s) + \frac{\sin(2s)}{2} \\
&\underset{s\to 0}{=} -s + \frac{s^3}{6} + \frac{2s - \frac{8s^3}{6}}{2} + o(s^3) \\
&\underset{s\to 0}{=} -\frac{s^3}{3} + o(s^3)
\end{aligned}$$

Ainsi

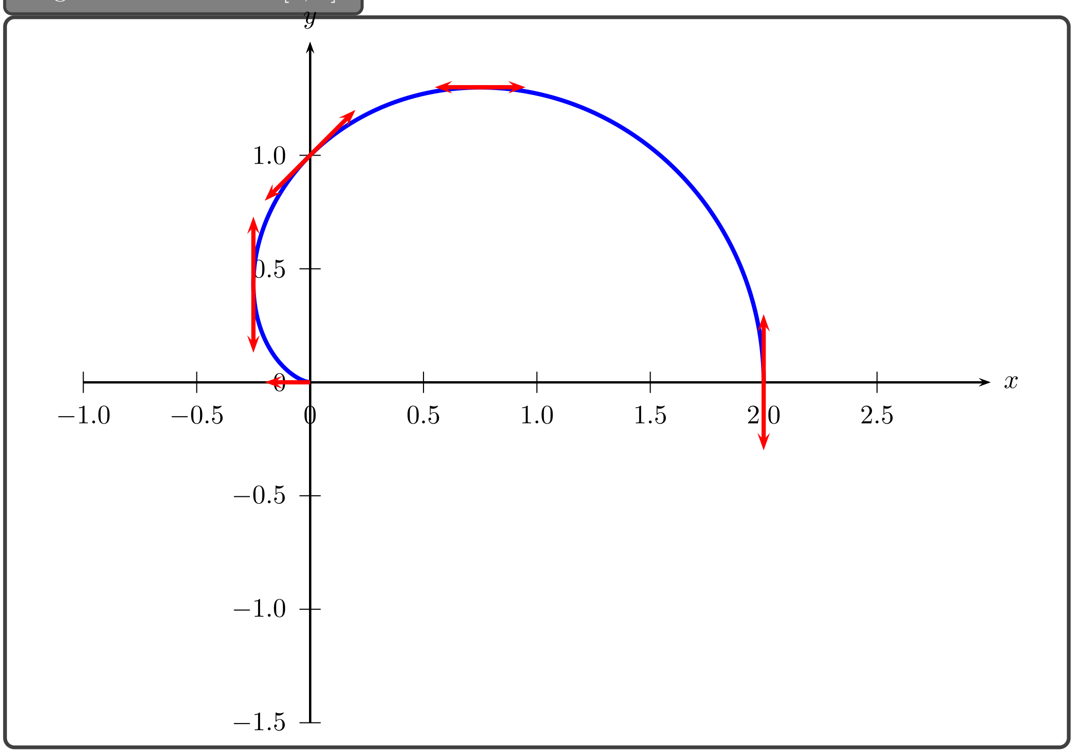
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t\to\pi}{=} \frac{(t-\pi)^2}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(t-\pi)^3}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + o(s^3)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ est libre donc le point de paramètre π est donc un point de rebroussement de première espèce. La tangente en ce point est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

5. On place tous les points particuliers ainsi que les tangentes en ces points. On peut également chercher les points où la courbe intersecte les axes, ici la courbe intersecte l'axe (Oy) au point de coordonnées $(0, 1)$ et sa tangente en ce point est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

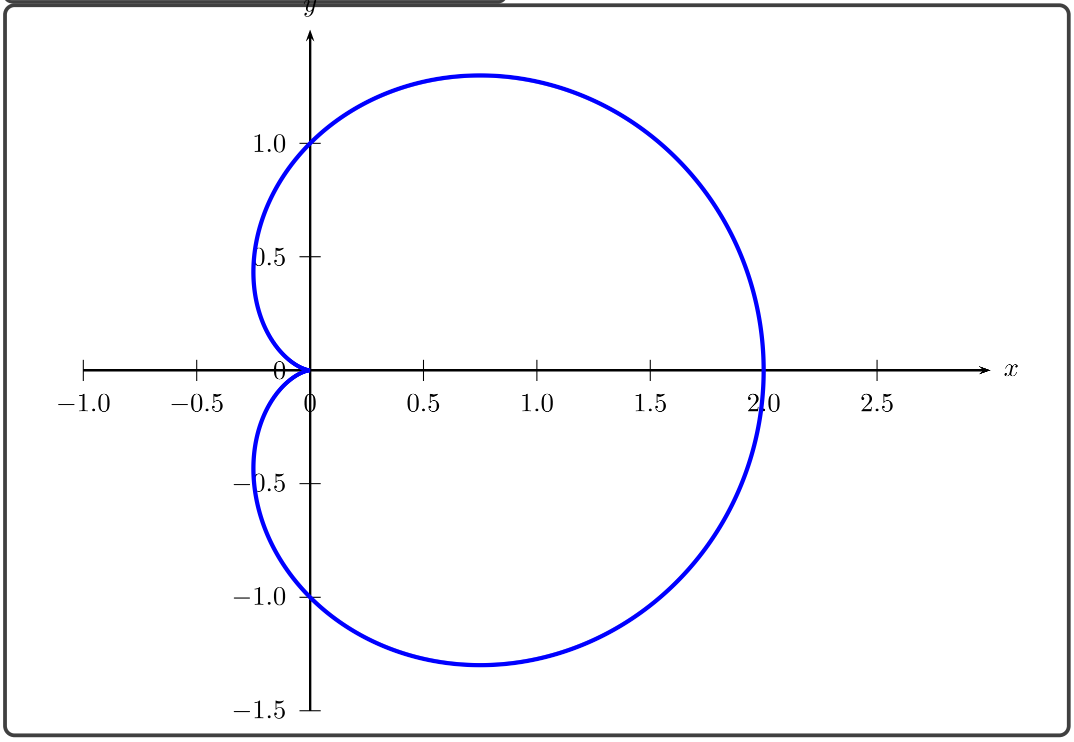
   On obtient le tracé suivant sur $[0, \pi]$

   Figure .1 – Tracé sur $[0, \pi]$



   Puis le tracé complet par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

Figure .2 – Tracé de (Γ), une cardioïde



Corrigé de l'exercice 7

a) La courbe est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Un point est un point double s'il existe deux réels distincts t et s tels que $M(t) = M(s)$.

Soit $(t,s) \in (\mathbb{R}^*)^2$ avec $t \neq s$, on a

$$\begin{aligned}
M(t) = M(s) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t^2 - 2t = s^2 - 2s \\ t^2 + \dfrac{1}{t^2} = s^2 + \dfrac{1}{s^2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t^2 - s^2 + 2s - 2t = 0 \\ t^2 - s^2 + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{s^2} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (t-s)(t+s+2) = 0 \\ (t-s)(t+s)\left(1 - \dfrac{1}{s^2t^2}\right) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = -s-2 \\ -2\left(\dfrac{s^2t^2-1}{s^2t^2}\right) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = -s-2 \\ (st)^2 = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = -s-2 \\ st = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} t = -s-2 \\ st = -1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = -s-2 \\ s^2 + 2s + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} t = -s-2 \\ s^2 + 2s - 1 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = -1 \\ s = -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} t = -s-2 \\ s = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} t = -s-2 \\ s = -\sqrt{2} - 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = -1-\sqrt{2} \\ s = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} t = \sqrt{2}-1 \\ s = -\sqrt{2} - 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement Il n'y a qu'un point double, le point $M(\sqrt{2}-1) = M(-\sqrt{2}-1)$ de coordonnées $(5-4\sqrt{2}, 6)$

Pour $t \neq 0$ on a

$$x'(t) = 2t - 2 \qquad y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} = 2\frac{t^4-1}{t^3}$$

On en déduit le tableau des variations conjointes

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$				$-$			0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	↘	3	↘	0	↘	-1	↗	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

La courbe admet trois branches infinies :

— Lorsque t tend vers 0, la courbe admet une asymptote d'équation $x = 0$

— Lorsque t tend vers $+\infty$ on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) - x(t) = +\infty$. Ainsi la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$. Puisque $y(t) - x(t)$ est positive pour t assez grand la courbe est au dessus de la direction asymptotique.

— Lorsque t tend vers $-\infty$ on a $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) - x(t) = -\infty$. Ainsi la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$. Puisque $y(t) - x(t)$ est négative pour t assez petit la courbe est au dessous de la direction asymptotique.

On a un point singulier en $t = 1$.

Pour $s \neq -1$ on a

$$x(1+s) = (1+s)^2 - 2 - 2s = -1 + s^2$$

$$\begin{aligned} y(1+s) &= (1+s)^2 + (1+s)^{-2} \\ &\underset{s\to0}{=} 1 + 2s + s^2 + 1 - 2s + \frac{6}{2}s^2 - \frac{24}{6}s^3 + o(s^3) \\ &\underset{s\to0}{=} 2 + 4s^2 - 4s^3 + o(s^3) \end{aligned}$$

Ainsi

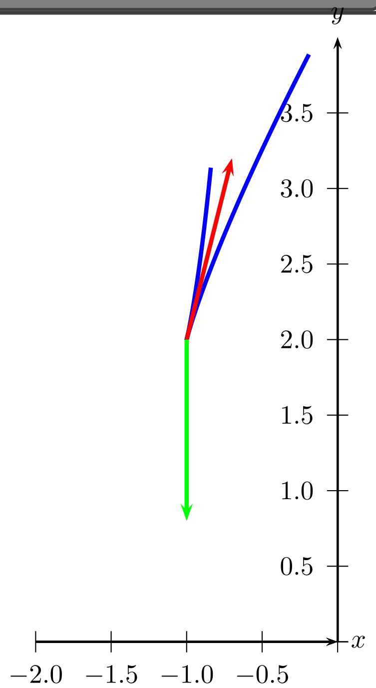
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t\to1}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (t-1)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + (t-1)^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + o((t-1)^3)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$ est libre donc le point $M(1)$ est donc un point de rebroussement de première espèce.

La tangente à la courbe en $M(1)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$. De plus l'écart entre la courbe et sa tangente en 1 se comporte localement comme $(t-1)^3\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$. Ainsi la courbe approche sa tangente « par au dessus »et repart « par en dessous.

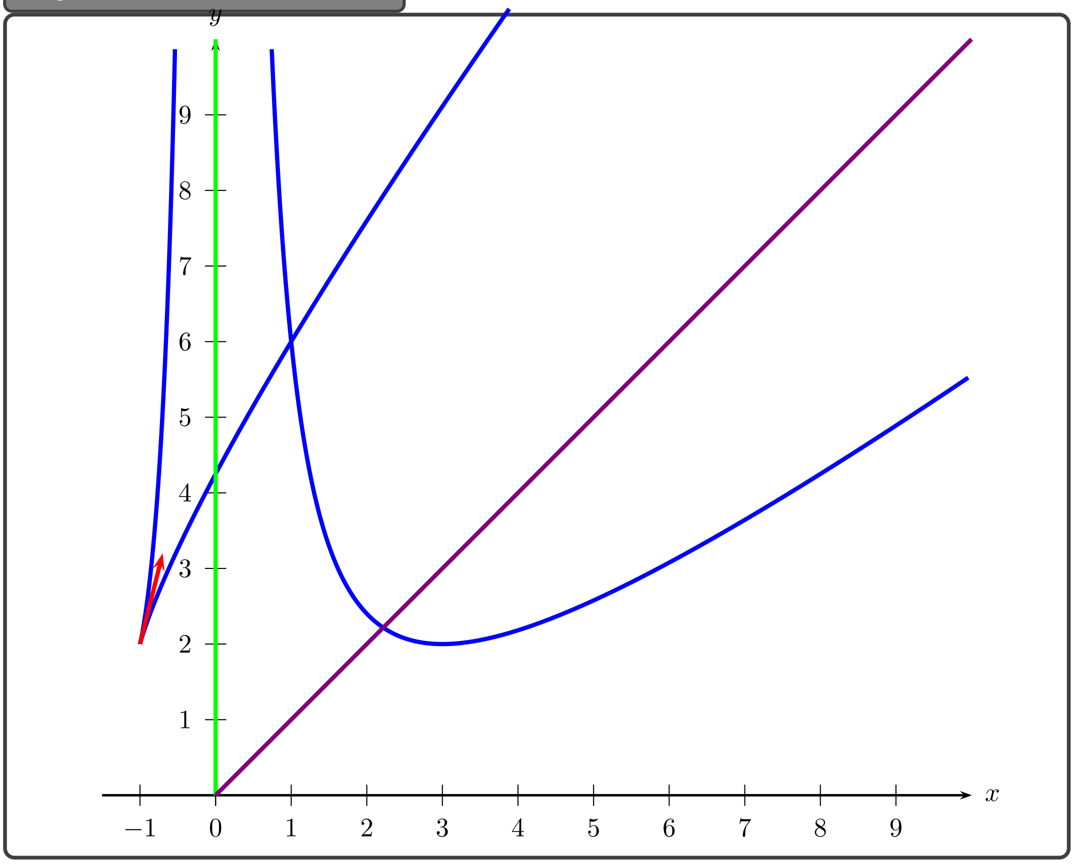
On a l'allure suivante : la courbe se rapproche de la tangente dirigée par le vecteur rouge en suivant la direction du vecteur vert, elle approche donc sa tangente « par au dessus »et repart « par en dessous ».

Figure .3 – Allure au voisinage du point de rebroussement



Il ne nous reste plus qu'à effectuer le tracé en plaçant les asymptotes, tous les points particuliers ainsi que les tangentes en ces points. On a tracé ici la courbe en bleu, l'asymptote verticale en vert et la direction asymptotique des deux branches paraboliques en violet.

Figure .4 – Tracé de la courbe



b) La courbe est définie sur $\mathbb{R}$.

x est périodique de période π et y est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$. Ainsi x et y sont périodiques de période commune 2π. On va donc limiter notre étude à un intervalle de largeur 2π

Comme x et y sont impaires on limite notre étude à $[0, \pi]$ et on obtient le support complet de la courbe par symétrie centrale par rapport à l'origine.

Pour $t \in \mathbb{R}$ on a $x(\pi - t) = \sin(2\pi - t) = -\sin(t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = \sin(3\pi - t) = \sin(\pi - t) = \sin(t) = y(t)$.

On va donc limiter notre étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on obtient le support de la courbe sur $[0, \pi]$ par symétrie orthogonale d'axe (Oy).

Puisque x et y sont périodiques tous les points de la courbe sont multiples. On va plutôt chercher les points doubles de la courbe restreinte à $[0, 2\pi[$.

On cherche donc les réels $(t, s) \in [0, 2\pi[^2$ tels que $t \neq s$ et $M(t) = M(s)$.

D'après notre réduction du domaine d'étude on va limiter $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (par contre $s \in [0, 2\pi]$.

On a $\sin(2s) = \sin(2t)$ si et seulement si $2s = 2t + 2\pi$ ou $2s = \pi - 2t$ ou $2s = 3\pi - 2t$, i.e. si et seulement si $s = t + \pi$ ou $s = \frac{\pi}{2} - t$ ou $s = \frac{3\pi}{2} - t$

On a $\sin(3s) = \sin(3t)$ si et seulement si $3s = 3t + 2\pi$ ou $3s = 3t + 4\pi$ ou $3s = \pi - 3t$ ou $3s = 3\pi - 3t$ ou $3s = 5\pi - 3t$ i.e. si et seulement si $s = t + \frac{2\pi}{3}$ ou $s = t + \frac{4\pi}{3}$ ou $s = \frac{\pi}{3} - t$ ou $s = \pi - t$ ou $s = \frac{5\pi}{3} - t$.

Cela nous donne 15 cas :

- $s = t + \pi$ et $s = t + \frac{2\pi}{3}$, ce qui est impossible
- $s = t + \pi$ et $s = t + \frac{4\pi}{3}$, ce qui est impossible
- $s = t + \pi$ et $s = \frac{\pi}{3} - t$, d'où $t = \frac{-\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- $s = t + \pi$ et $s = \pi - t$, d'où $t = 0$ et $s = \pi$

— $s = t + \pi$ et $s = \dfrac{5\pi}{3} - t$, d'où $t = \dfrac{\pi}{3}$ et $s = \dfrac{4\pi}{3}$

— $s = \dfrac{\pi}{2} - t$ et $s = t + \dfrac{2\pi}{3}$, d'où $t = \dfrac{-\pi}{12} \notin \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

— $s = \dfrac{\pi}{2} - t$ et $s = t + \dfrac{4\pi}{3}$, d'où $t = \dfrac{-5\pi}{12} \notin \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

— $s = \dfrac{\pi}{2} - t$ et $s = \dfrac{\pi}{3} - t$, ce qui est impossible

— $s = \dfrac{\pi}{2} - t$ et $s = \pi - t$, ce qui est impossible

— $s = \dfrac{\pi}{2} - t$ et $s = \dfrac{5\pi}{3} - t$, ce qui est impossible

— $s = \dfrac{3\pi}{2} - t$ et $s = t + \dfrac{2\pi}{3}$, d'où $t = \dfrac{5\pi}{12}$ et $s = \dfrac{13\pi}{2}$

— $s = \dfrac{3\pi}{2} - t$ et $s = t + \dfrac{4\pi}{3}$, d'où $t = \dfrac{\pi}{12}$ et $s = \dfrac{17\pi}{12}$

— $s = \dfrac{3\pi}{2} - t$ et $s = \dfrac{\pi}{3} - t$, ce qui est impossible

— $s = \dfrac{3\pi}{2} - t$ et $s = \pi - t$, ce qui est impossible

— $s = \dfrac{3\pi}{2} - t$ et $s = \dfrac{5\pi}{3} - t$, ce qui est impossible

On obtient donc 4 points doubles : $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ et $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

Puis, par symétrie, on obtient les points doubles $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Au final notre courbe restreinte à $[, 2\pi[$ admet 7 points doubles.

Pour $t \neq 0$ on a

$$x'(t) = 2\cos(2t) \qquad y'(t) = 3\cos(3t)$$

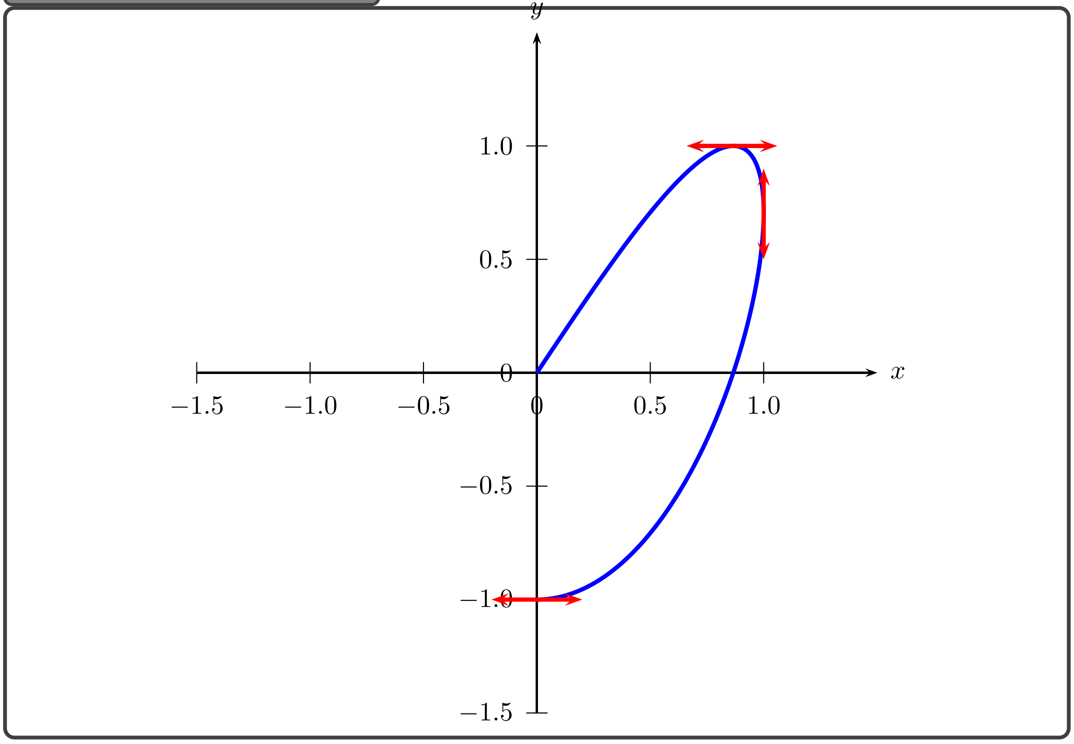
On en déduit le tableau des variations conjointes

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$			$+$		0		$-$		
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0			$-$			

La courbe n'a pas de points singuliers ni de branche infinie.

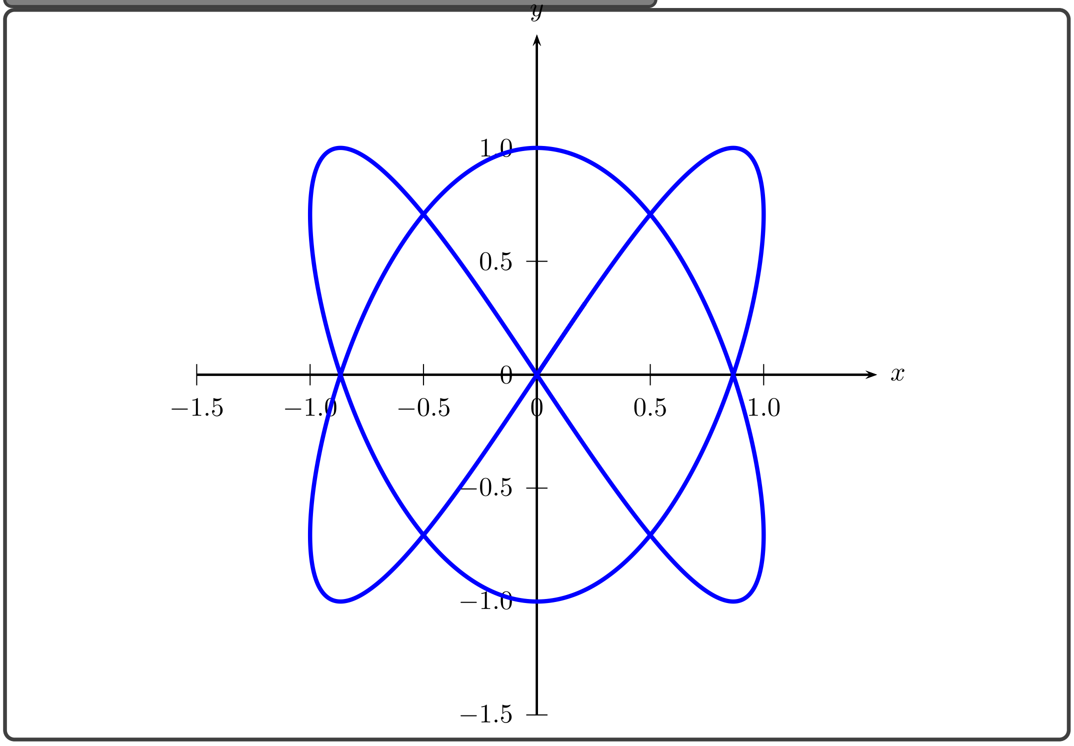
On peut maintenant la tracer

Figure .5 – Tracé sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



Puis le tracé complet par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées et symétrie centrale par rapport à l'origine.

Figure .6 – Tracé complet : une courbe de Lissajous



c) La courbe est définie sur $\mathbb{R}$.

x et y sont périodique de période 2π. On va donc limiter notre étude à un intervalle de largeur 2π

Comme x est impaire et y est paire on limite notre étude à $[0, \pi]$ et on obtient le support complet de la courbe par symétrie centrale par rapport à l'origine.

x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$x'(t) = \cos(t), \qquad y'(t) = \frac{\sin(t)\cos(t)(3\cos(t) - 4)}{(2 - \cos(t))^2}$$

On en déduit le tableau des variations conjointes

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y(t)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$	0

Il n'y a pas de branches infinies. La courbe admet un point singulier en $t = \frac{\pi}{2}$

Pour $s \in \mathbb{R}$ on a

$$x\left(\frac{\pi}{2} + s\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + s\right) = \cos(s) \underset{s \to 0}{=} 1 - \frac{s^2}{2} + o(s^3)$$

et

$$\begin{aligned}
y\left(\frac{\pi}{2} + s\right) &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + s\right)^2}{2 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + s\right)} \\
&= \frac{\sin(s)^2}{2 + \sin(s)} \\
&\underset{s \to 0}{=} \left(s - \frac{s^3}{6} + o(s^3)\right)^2 \frac{1}{2 + s - \frac{s}{6} + o(s^3)} \\
&\underset{s \to 0}{=} \left(s - \frac{s^3}{6} + o(s^3)\right)^2 \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s}{2} + \frac{s^3}{12} + \left(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{12}\right)^3 + o(s^3)\right) \\
&\underset{s \to 0}{=} \frac{1}{2}(s^2 + o(s^3))\left(1 - \frac{s}{2} + \frac{s^3}{12} + \frac{s^2}{4} - \frac{s^3}{8} + o(s^3)\right) \\
&\underset{s \to 0}{=} \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{4} + o(s^3)
\end{aligned}$$

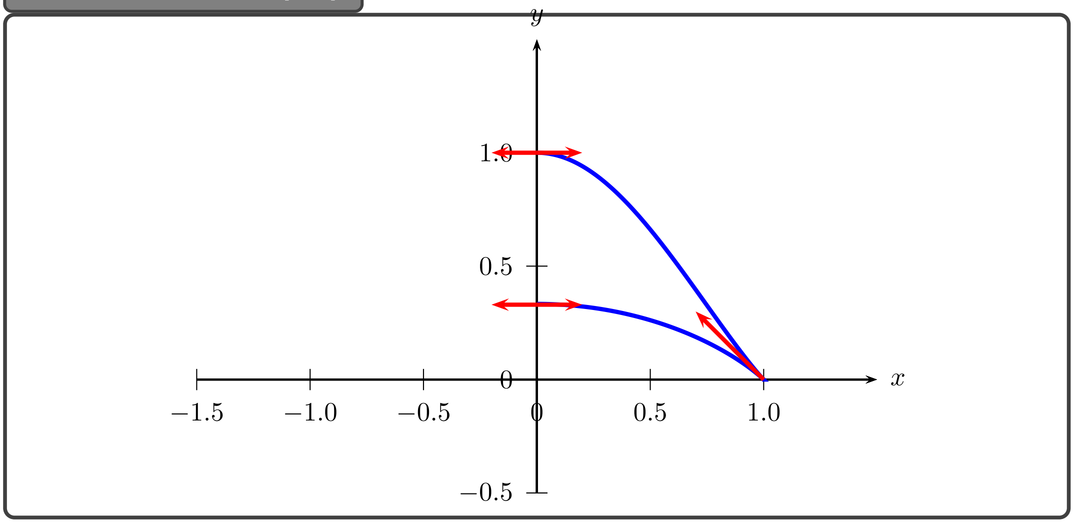
Ainsi

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t \to \frac{\pi}{2}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + o\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\right)$ est libre, ainsi le point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un point de rebroussement de première espèce. La tangente en ce point est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

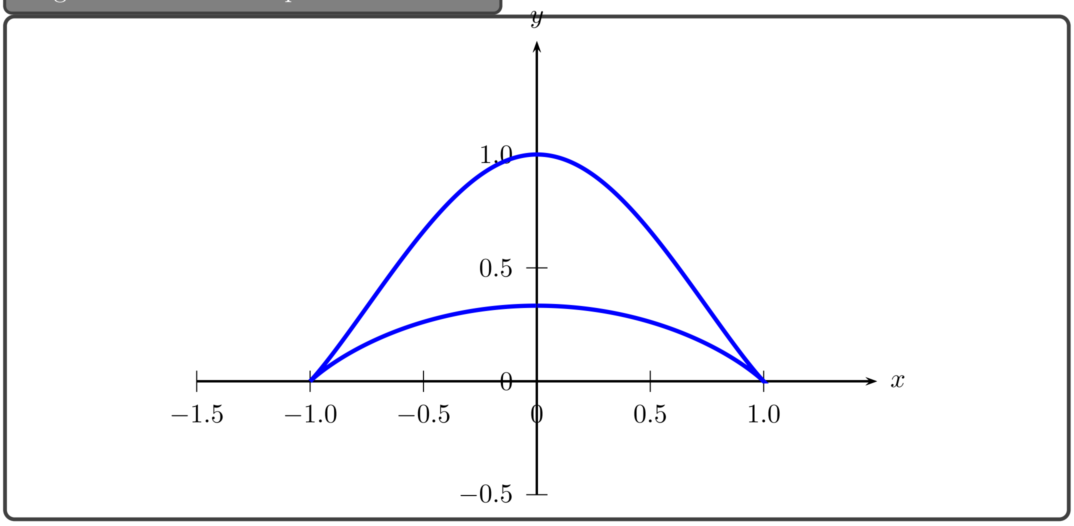
On trace le support de la courbe sur $[0, \pi]$.

Figure .7 – Tracé sur $[0, \pi]$



Puis le tracé complet par symétrie

Figure .8 – Tracé complet : un bicorne



d) La courbe est définie sur $\mathbb{R}^*$.

x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et, pour $t \neq 0$ on a

$$x'(t) = \frac{t^2 - 1}{2t^2} \qquad y'(t) = \frac{2(1-t)}{t^3}$$

On en déduit le tableau des variations conjointes

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \ \| \ +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \ \| \ -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$		$-$			$\|$	$+$	0	$-$	

Le point de paramètre 1 est un point singulier. Pour $s \neq -1$ on a

$$\begin{aligned} x(1+s) &= \frac{(1+s)^2+1}{2(1+s)} \\ &\underset{s\to 0}{=} \frac{2+2s+s^2}{2}(1-s+s^2-s^3+o(s^3)) \\ &\underset{s\to 0}{=} 1+\frac{s^2}{2}-\frac{s^3}{2}+o(s^3) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y(1+s) &= \frac{1+2s}{(1+s)^2} \\ & (1+2s)(1+s)^{-2} \\ &\underset{s\to 0}{=} (1+2s)(1-2s+3s^2-4s^3+o(s^3)) \\ &\underset{s\to 0}{=} 1-s^2+2s^3+o(s^3)) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t\to 1}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(t-1)^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{(t-1)^3}{6}\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} o\left((t-1)^3\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}\right)$ est libre, ainsi le point $M(1)$ est un point de rebroussement de première espèce. La tangente à la courbe en $M(1)$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

La courbe admet des branches infinies pour t au voisinage $-\infty$, de 0 et $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

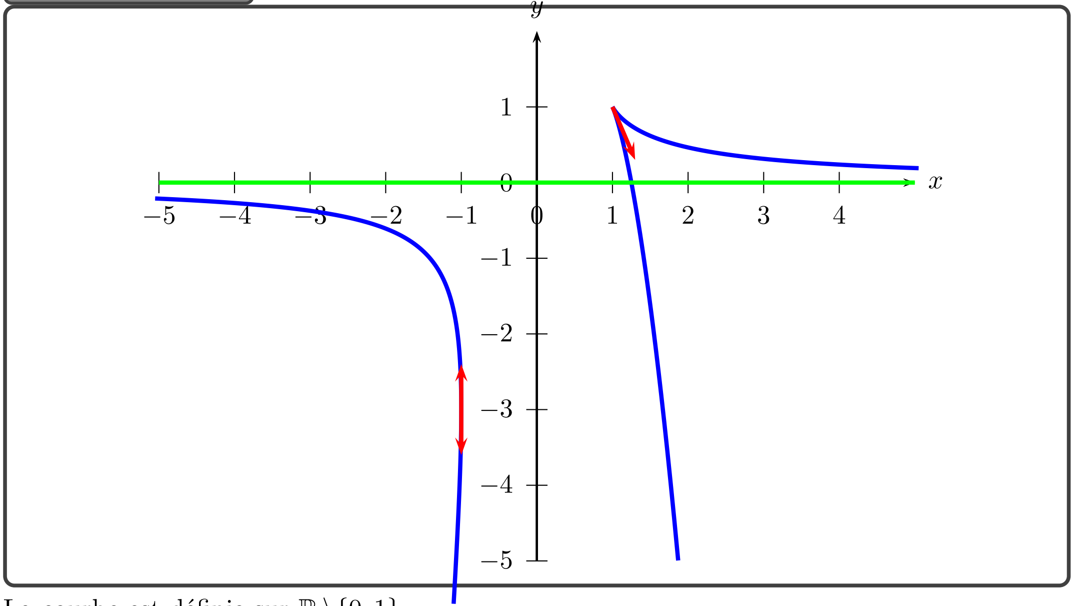
Pour $t \neq 0$ on a

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2t(2t-1)}{t^2(t^2+1)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-2t}{t^2}$$

Ainsi $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ tend vers $\pm\infty$ en 0. La courbe admet donc une branche parabolique de direction asymptotique l'axe (Oy).

Le tracé de la courbe donne

Figure .9 – Tracé



e) La courbe est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine et, pour $t\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ on a

$$x'(t)=\frac{t-1-t\ln|t|}{t(t-1)^2}\qquad y'(t)=\frac{t^2-1}{t(t^2+1)^2}$$

Posons $g : t\mapsto t-1-t\ln|t|$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour $t\neq 0$ on a $g'(t)=-\ln|t|$

g est donc décroissante sur $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$, croissante sur $]-1,0[$ et $]0,1[$.

On a $g(1)=0$, donc g est négative sur $]0,+\infty[$.

g a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et $g(-1)<0$, donc, par continuité et stricte monotonie de g, il existe un unique réel $\alpha\in]-\infty,-1[$ tel que $g(\alpha)=0$. g admet pour limite -1 en 0, donc g ne s'annule pas sur $]-1,0[$. g est ainsi positive sur $-\infty,\alpha[$ et négative sur $]\alpha,0[$.

On peut remarquer que x se prolonge par continuité en 1 par la valeur 1

On en déduit le tableau des variations conjointes

t	$-\infty$		α		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0		$+$		$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
$x(t)$	0	$\searrow$	$\frac{1}{\alpha}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$y(\alpha)$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$			$-$		0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Il y a des branches infinies pour t au voisinage de 0, $+\infty$ et $-\infty$.

Il y a une asymptote verticale d'équation $x=0$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Au voisinage de 0 on a $\dfrac{y(t)}{x(t)}\xrightarrow[t\to 0]{} 1$ et

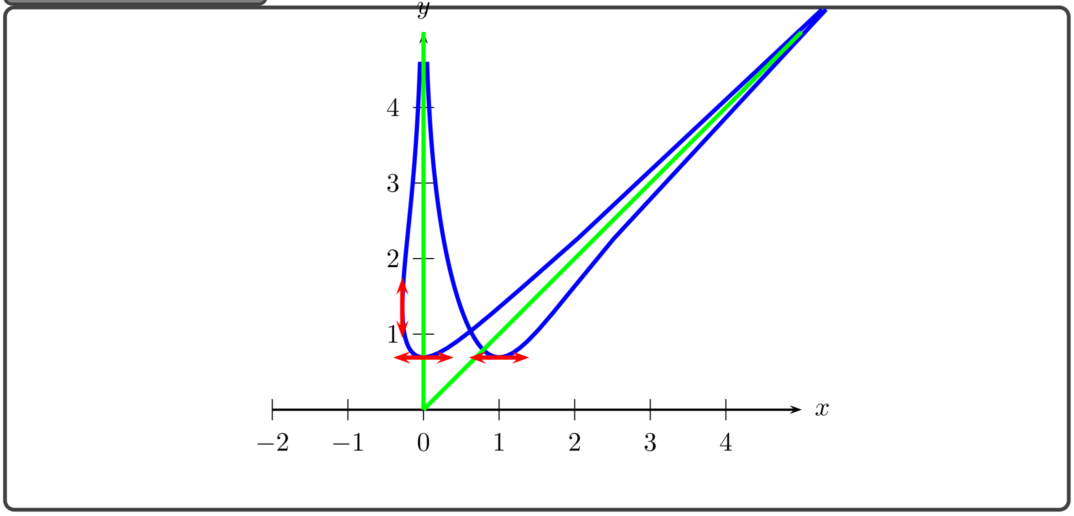
$$y(t) - x(t) = \ln|t| \left(\frac{1}{1-t} - \ln(1+t^2) \right) \underset{t \to 0}{\sim} t \ln|t| \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

La courbe admet donc un asymptote oblique d'équation $y = x$.

il n'y a pas de point singulier.

On obtient le tracé suivant

Figure .10 – Tracé



f) x est périodique de période $\dfrac{4\pi}{3}$. y est périodique de période 2π. Ainsi x et y sont périodiques de période commune $4\pi = 2 \times 2\pi = 3 \times \dfrac{4\pi}{3}$

On limitera notre étude à un intervalle de longueur 4π.

Pour $t \in \mathbb{R}$, On a $y(t+2\pi) = y(t)$ et $x(t+2\pi) = \cos\left(\dfrac{3t}{2} + 3\pi\right) = -x(t)$. On limite donc notre étude à $[0, 2\pi]$ et on obtiendra le support complet par une symétrie orthogonale d'axe (Ox).

x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$x'(t) = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right) \qquad y'(t) = 2\cos(t) - 2\sin(2t) = 2\cos(t)(1 - 2\sin(t))$$

On en déduit le tableau des variations conjointes

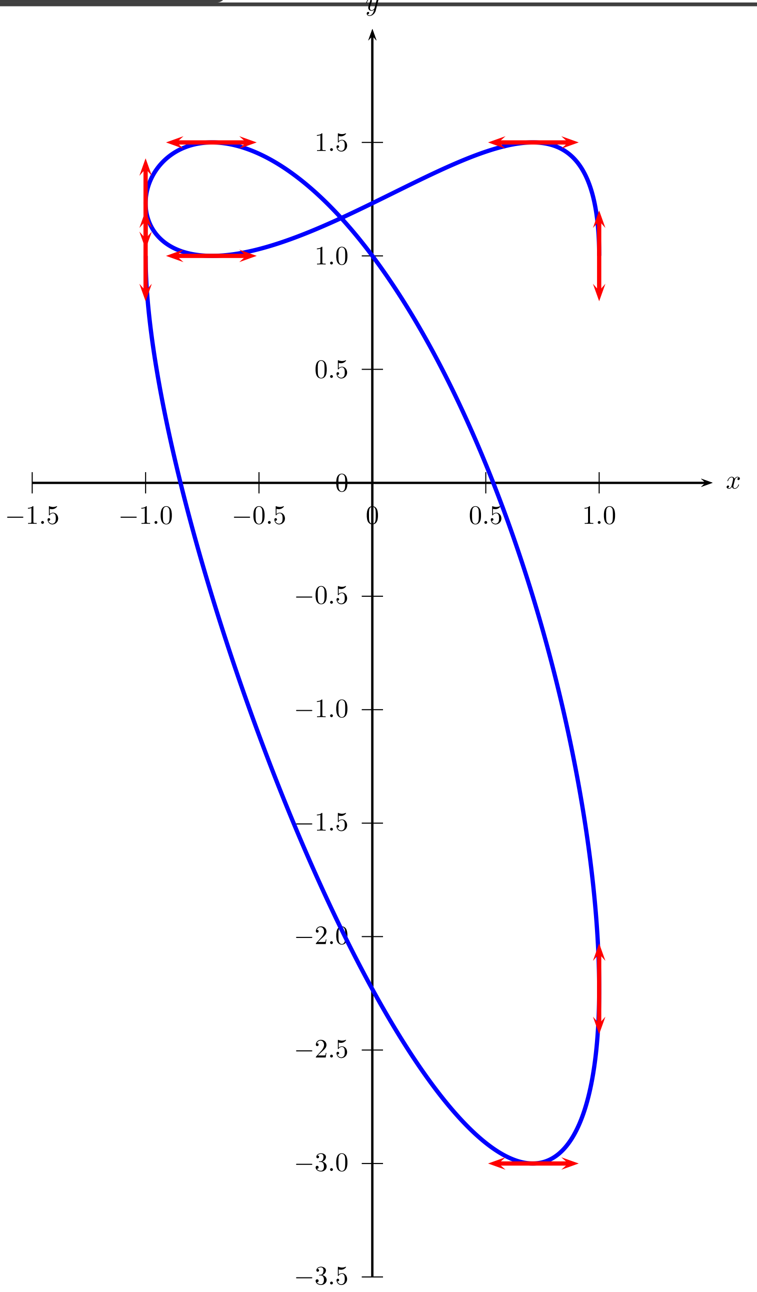
t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x'(t)$	0			$-$			0		$+$		0		$-$		0
$x(t)$	1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		-1
$y(t)$	1		$\frac{3}{2}$		1		$\sqrt{3}-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$-\sqrt{3}-\frac{1}{2}$		-3		1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0		$+$		0		$-$		0	$+$	

Il n'y a pas de points singuliers ni de branche infinie

Pour s'aider dans le tracé on peut également placer les points $M\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(0, \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$, $M(\pi) = (0, 1)$ et $M\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \left(0, -\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$.

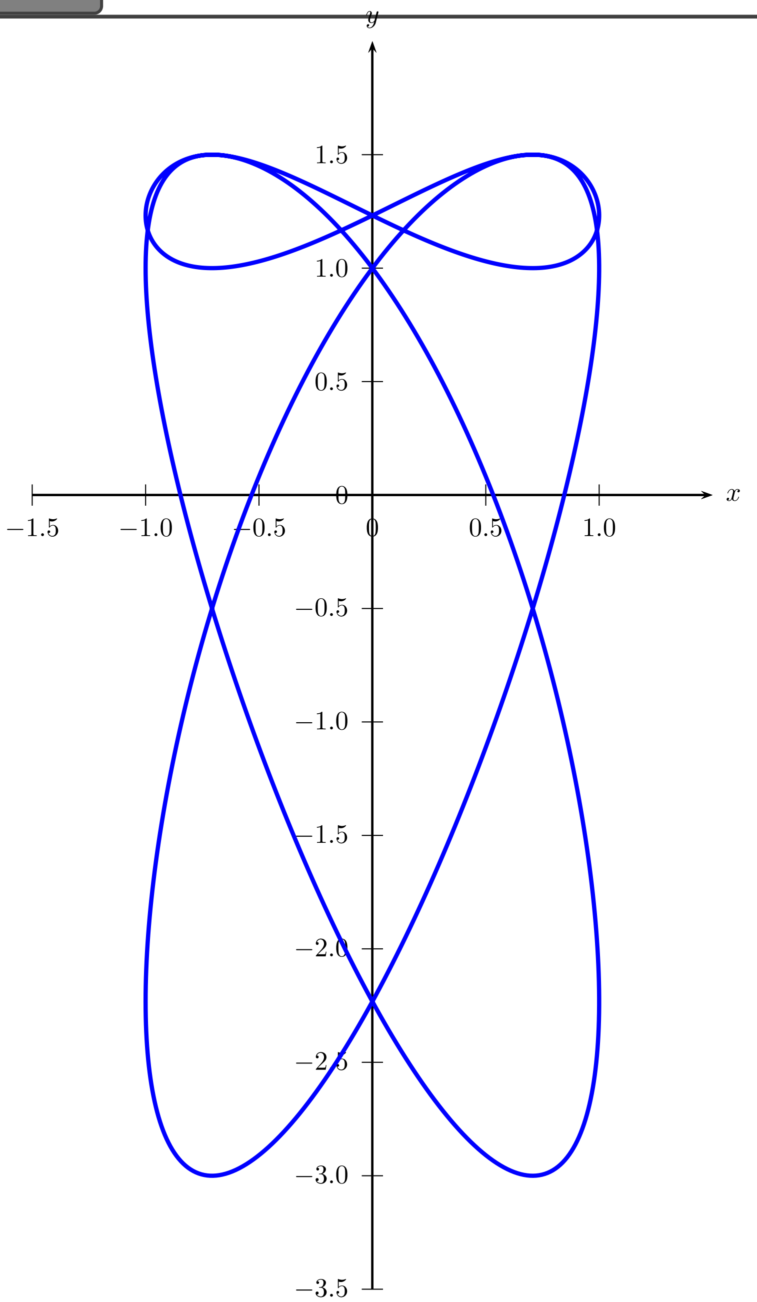
On obtient le tracé suivant sur $[0, 2\pi]$:

Figure .11 – Tracé sur $[0, 2\pi]$



Puis le tracé complet par symétrie orthogonale d'axe (Ox).

Figure .12 – Tracé



Corrigé de l'exercice 8

— x et y sont 2π-périodiques donc le point $M(t+2\pi)$ et $M(t)$ sont confondus.

— x est paire et y est impaire. On obtient donc le point $M(-t)$ à partir du point $M(t)$ par la symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses (Ox).

— On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$x(\pi - t) = \arccos(\cos(\pi - t)) = \arccos(-\cos(t)) = \pi - \arccos(\cos(t)) = \pi - x(t)$$

$$y(\pi - t) = \arcsin(\sin(\pi - t)) = \arcsin(\sin(t)) = \arcsin(\sin(t))$$

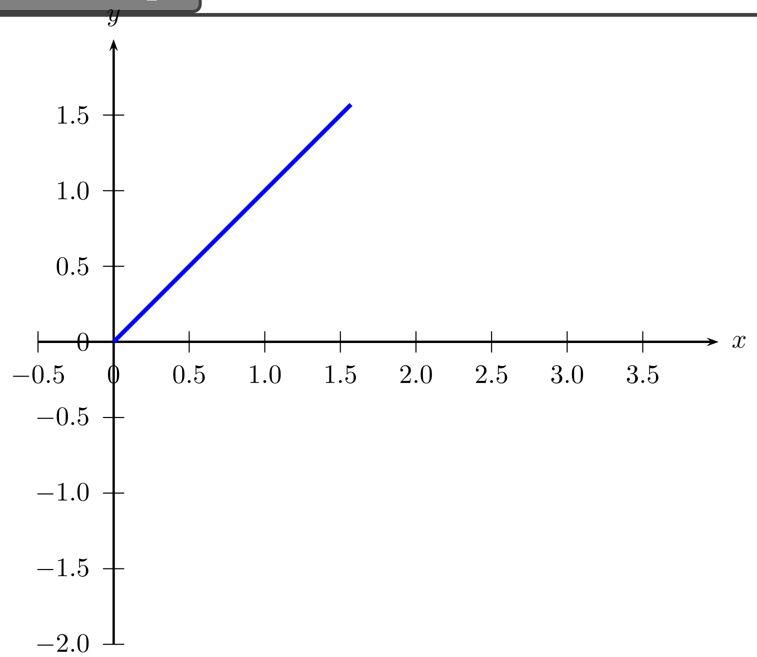
Ainsi $M(\pi - t)$ s'obtient à partir de $M(t)$ par la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$

D'après les observations précédentes on peut restreindre notre étude à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\begin{cases} x(t) & = \arccos(\cos t) = t \\ y(t) & = \arcsin(\sin t) = t \end{cases}$

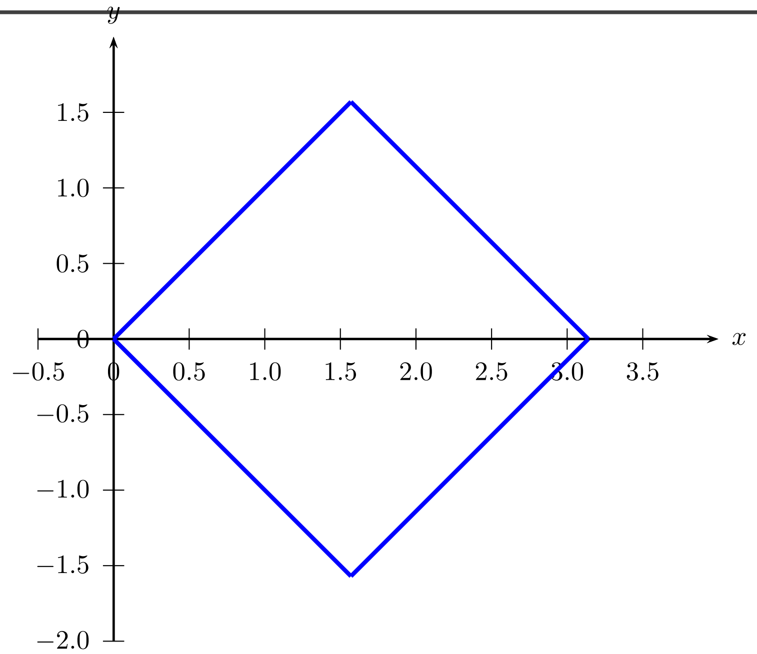
On obtient le tracé suivant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Figure .13 – Tracé sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



Puis le tracé complet par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses et symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$

Figure .14



Corrigé de l'exercice 9

1. La fonction $t \mapsto \cos(t)$ est 2π périodique et la fonction $t \mapsto \cos(5t)$ est $\frac{2\pi}{5}$ périodique. Elles

ont pour période commune tout réel $T > 0$ tel qu'il existe $(k, k') \in \mathbb{N}^2$ avec $T = 2k\pi = \dfrac{2k'\pi}{5}$.
En particulier elles sont toutes les deux 2π périodiques. Ainsi x est 2π-périodique.

De même y est 2π-périodique. On peut donc restreindre notre étude à un intervalle de largeur 2π.

De plus x est paire et y est impaire. On va donc se restreindre à $[0, \pi]$ et on obtiendra le support complet par symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Ox).

Pour $t \in \mathbb{R}$ on a $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$. On va donc se restreindre à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et on obtiendra le support sur $[0, \pi]$ par symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Oy).

Enfin pour $t \in \mathbb{R}$ on a $x\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = y(t)$ et $y\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = x(t)$. On va donc se restreindre à $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et on obtiendra le support sur $[0, \pi]$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

x et y sont de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
x'(t) &= 5(\sin(5t) - \sin(t)) \\
&= 5(\sin(3t + 2t) - \sin(3t - 2t)) \\
&= 5(\sin(3t)\cos(2t) + \sin(2t)\cos(3t) - (\sin(3t)\cos(2t) - \sin(2t)\cos(3t))) \\
&= 10\sin(2t)\cos(3t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(t) &= 5(\cos(t) - \cos(5t)) \\
&= 5(\cos(3t - 2t) - \cos(3t + 2t)) \\
&= 5(\cos(3t)\cos(2t) + \sin(3t)\sin(2t) - (\cos(3t)\cos(2t) - \sin(3t)\sin(2t))) \\
&= 10\sin(3t)\sin(2t)
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau des variations conjointes

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$x(t)$	4	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	$3\sqrt{2}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$
$y'(t)$	0		$+$		

Le point de paramètre 0 est un point singulier.

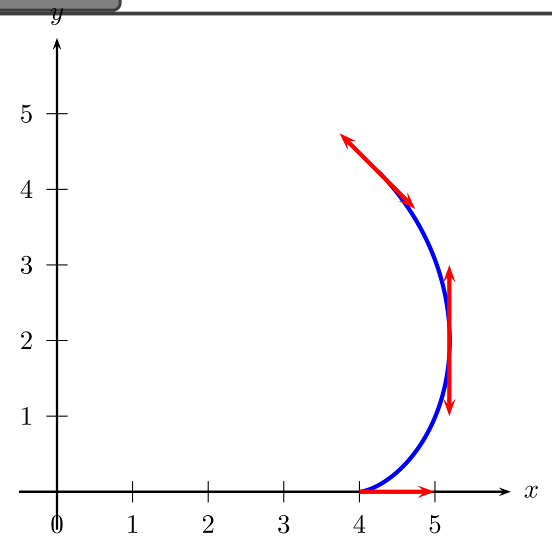
On a
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t \to 0}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} + o(t^3)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}\right)$ est libre, ainsi le point de paramètre 0 est un point de rebroussement de première espèce. La tangente à la courbe en ce point est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

La tangente au point de paramètre $\frac{\pi}{4}$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $\left(x'\left(\frac{\pi}{4}\right), y'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \begin{pmatrix} -5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$

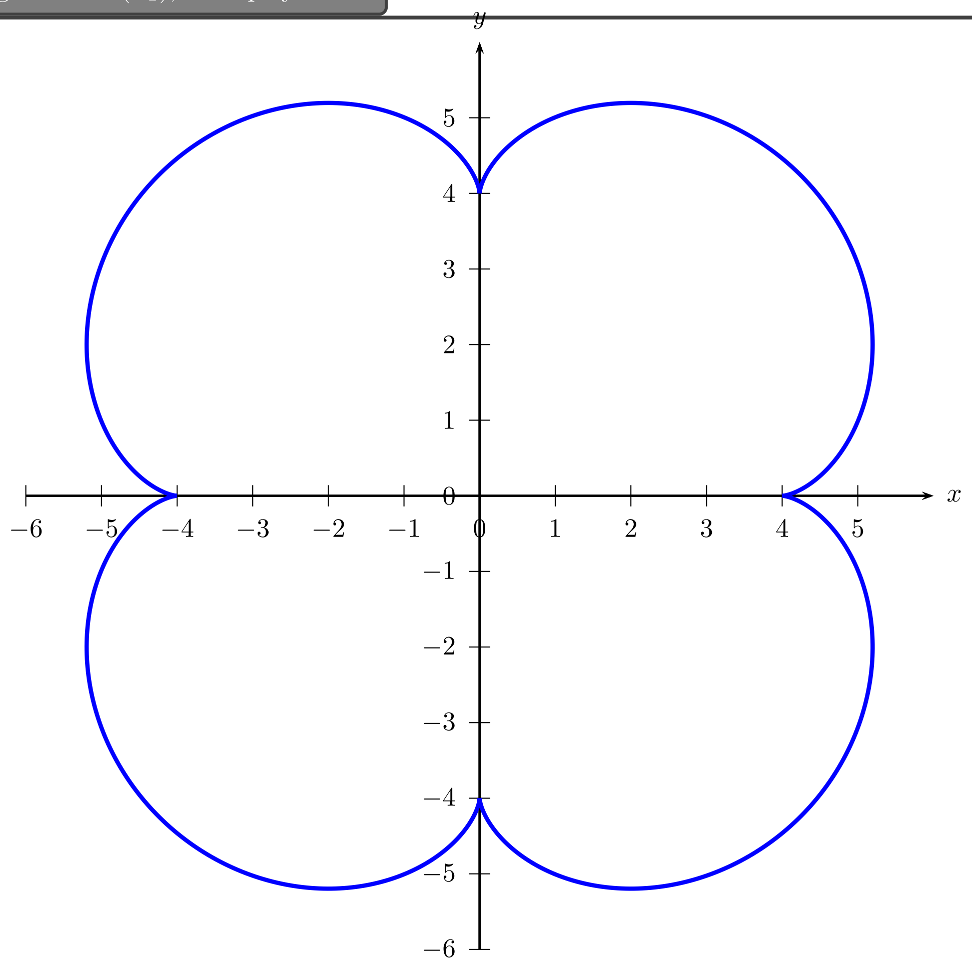
On obtient le tracé suivant sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Figure .15 – Tracé sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



Puis le tracé complet par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses et symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées

Figure .16 – (Γ_1), une épicycloïde



2. Soit $t \in [0, 2\pi]$.

Si $M(t)$ est un point régulier (i.e. si $\sin(2t) \neq 0$) sa tangente est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\sin(2t)\cos(3t) \\ 10\sin(3t)\sin(2t) \end{pmatrix} = 10\sin(2t)\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{n(t)}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \sin(3t) \\ -\cos(3t) \end{pmatrix}$ dirige alors la normale à la courbe au point $M(t)$.

Ainsi, la normale à la courbe en $M(t)$ est la droite de représentation paramétrique

$$N_t = \{(5\cos(t) - \cos(5t) + s\sin(3t), 5\sin(t) - \sin(5t) - s\cos(3t))\ ,\ s \in \mathbb{R}\}$$

Le projeté orthogonal $H(t)$ de O sur N_t est l'unique point de N_t tel que $\overrightarrow{OH(t)}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{n(t)}$.

On cherche donc $s \in \mathbb{R}$ tel que

$$(5\cos(t) - \cos(5t) + s\sin(3t))\sin(3t) - (5\sin(t) - \sin(5t) - s\cos(3t))\cos(3t) = 0$$

Ainsi

$$s(\sin(3t)^2 + \cos(3t)^2) = (5\sin(t) - \sin(5t))\cos(3t) - (5\cos(t) - \cos(5t))\sin(3t)$$

Et donc

$$s = 5(\sin(t)\cos(3t) - \cos(t)\sin(3t)) - (\sin(5t)\cos(3t) - \cos(5t)\sin(3t)) = 5\sin(-2t) - \sin(2t) = -6\sin(2t)$$

Ainsi $H(t)$ a pour coordonnées

$$\begin{aligned}
&(5\cos(t) - \cos(5t) - 6\sin(2t)\sin(3t), 5\sin(t) - \sin(5t) + 6\sin(2t)\cos(3t)) \\
&\qquad = (5\cos(t) - \cos(5t) - 3(\cos(-t) - \cos(5t)), 5\sin(t) - \sin(5t) + 3(\sin(5t) + \sin(-t)) \\
&\qquad = (2\cos(t) + 2\cos(5t), 2\sin(t) + 2\sin(5t)) \\
&\qquad = 2\left(\cos(t) + \cos(5t), \sin(t) + \sin(5t)\right) \\
&\qquad = 2\left(\cos(3t - 2t) + \cos(3t + 2), \sin(3t - 2t) + \sin(3t + 2t)\right) \\
&\qquad = 4\left(\cos(3t)\cos(2t), \sin(3t)\cos(2t)\right)
\end{aligned}$$

Étudions maintenant la situation aux quatre points singuliers :

— Pour $t = 0$ la tangente est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. La normale à (Γ_1) en $M(0)$ est alors la droite de représentation paramétrique

$$N_0 = \{(4, 0 + s)\ ,\ s \in \mathbb{R}\}$$

Le projeté orthogonal de O sur N_0 est le point de coordonnées $(4, 0)$.

— On obtient la situation en $t = \dfrac{\pi}{2}$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$, le projeté orthogonal de O sur $N_{\frac{\pi}{2}}$ est le point de coordonnées $(0, 4)$.

— On obtient la situation en $t = \dfrac{\pi}{2}$ par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées, le projeté orthogonal de O sur N_π est le point de coordonnées $(-4, 0)$.

— On obtient la situation en $t = \dfrac{3\pi}{2}$ par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses, le projeté orthogonal de O sur $N_{\frac{3\pi}{2}}$ est le point de coordonnées $(0, -4)$.

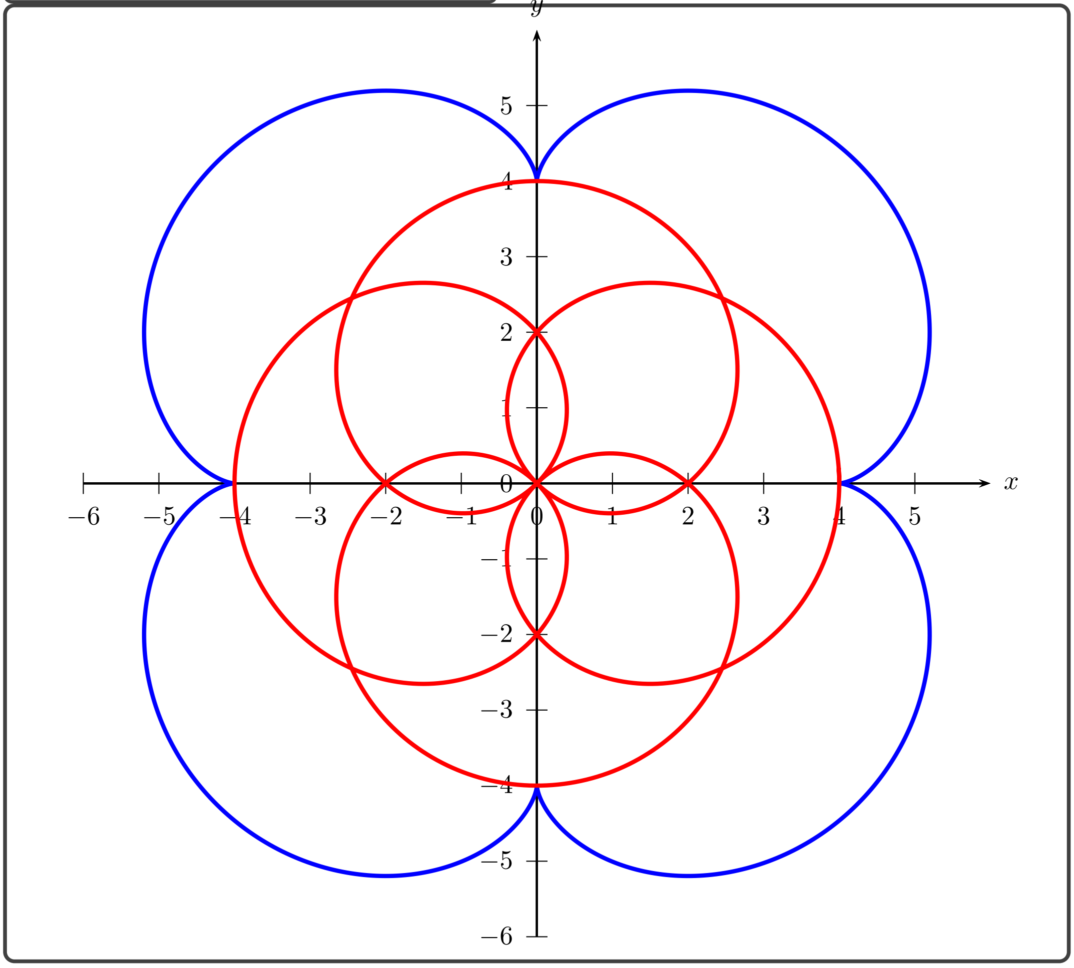
On constate que ces points coïncident avec le paramétrage $H(t)$ obtenu précédemment pour $t \in \left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

Ainsi lorsque $M(t)$ décrit (Γ_1), le projeté orthogonal $H(t)$ de O sur la normale à (Γ_1) en $M(t)$ décrit la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) &= 4\cos(3t)\cos(2t) \\ y(t) &= 4\sin(3t)\cos(2t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Si on pose le changement de paramètre $\theta = 3t$ alors le projeté orthogonal de O sur la normale à (Γ_1) en $M(t)$ décrit la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(\theta) & = 4\cos\left(\dfrac{2\theta}{3}\right)\cos(\theta) \\ y(t) & = 4\cos\left(\dfrac{2\theta}{3}\right)\sin(\theta) \end{cases}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, i.e. la courbe (Γ_2).

La question n'est pas posée mais on peut aussi tracer (Γ_2), on obtient

Figure .17 – (Γ_2) en rouge, une rosace



Corrigé de l'exercice 10

1. x est paire et y est impaire, on va donc limiter notre étude à $[0, +\infty[$. On obtiendra le support total par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

   Pour $t \geqslant 0$ on a
   $$x'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \qquad y'(t) = \frac{1-t^4-4t^2}{(1+t^2)^2}$$

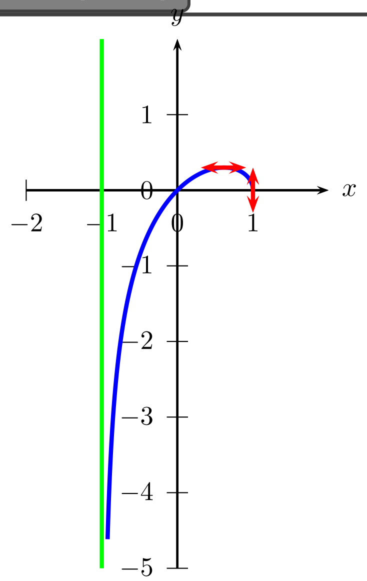
   Or, $1-t^4-4t^2 = -(t^2+2+\sqrt{5})(t^2-\sqrt{5}+2)$. On en déduit le tableau des variations conjointes sur $[0, +\infty[$.

t	0		$\sqrt{\sqrt{5}-2}$		$+\infty$
$x'(t)$	0		$-$		
$x(t)$	1	$\searrow$	$\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$	$\searrow$	-1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{(3-\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{5}-1}$	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	

La courbe n'a pas de points singuliers. On étudie sa branche infinie en $+\infty$. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -1$ et $\lim\limits_{t+\infty} y(t) = -\infty$ la courbe admet comme asymptote la droite d'équation $x = -1$.

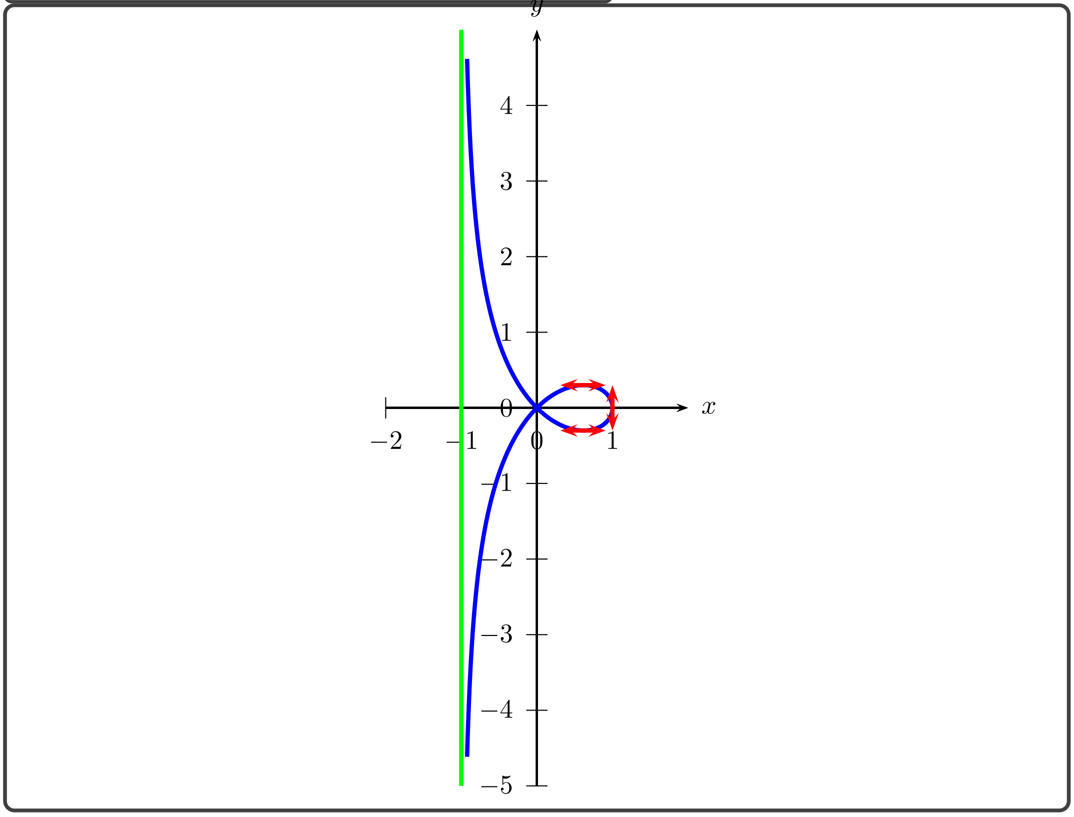
Le tracé de (Γ) pour $t \in [0, +\infty[$ donne

Figure .18 – Tracé de (Γ) pour $t \in [0, +\infty[$



Puis, par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses

Figure .19 – Tracé de (Γ), une strophoïde droite



2. Pour $t \in \mathbb{R}$ on a $y(t) = tx(t)$, donc si $x \neq 0$, $t = \dfrac{y}{x}$.

   On a alors $x = \dfrac{1 - \frac{y^2}{x^2}}{1 - \frac{y^2}{x^2}}$, donc $x = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, ce qui équivaut à $x^3 + xy^2 = x^2 - y^2$.

   Remarquons que $x(t) = 0$ lorsque $t = 1$ ou $t = -1$. Dans ces deux cas on a également $y(t) = 0$, ainsi la relation $x^3 + xy^2 = x^2 - y^2$ est également vérifiée.

   Réciproquement, si $x^3 + xy^2 = x^2 - y^2$, alors :

   — si $x = 0, y = 0$: on obtient le point $(0, 0)$, qui appartient à Γ.

   — Sinon, on pose $t = \dfrac{y}{x}$. On a $x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et $y = \dfrac{t - t^3}{1 + t^2}$. On obtient bien un point de Γ.

   Finalement (Γ) a pour équation cartésienne $x^3 + xy^2 = x^2 - y^2$.

3. On considère trois points de Γ, de paramètres distincts t_1, t_2 et t_3.

   $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{M(t_1)M(t_2)}, \overrightarrow{M(t_1)M(t_3)}) = 0$.

   On peut se lancer directement dans le calcul

$$
\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{M(t_1)M(t_2)},\overrightarrow{M(t_1)M(t_3)})\\
&= \begin{vmatrix} x(t_2) & x(t_3) - x(t_1) \\ y(t_2) & y(t_3) - y(t_1) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x(t_1) & x(t_3) - x(t_1) \\ y(t_1) & y(t_3) - y(t_1) \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} x(t_2) & x(t_3) - x(t_1) \\ y(t_2) & y(t_3) - y(t_1) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x(t_1) & x(t_3) \\ y(t_1) & y(t_3) \end{vmatrix} =\\
&= \begin{vmatrix} x(t_2) & x(t_3) \\ t_2x(t_2) & t_3x(t_3) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x(t_2) & x(t_1) \\ t_2x(t_2) & t_1x(t_1) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x(t_1) & x(t_3) \\ t_1x(t_1) & t_3x(t_3) \end{vmatrix}\\
&= x(t_2)x(t_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t_2 & t_3 \end{vmatrix} - x(t_1)x(t_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t_2 & t_1 \end{vmatrix} - x(t_1)x(t_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_3 \end{vmatrix}\\
&= x(t_2)x(t_3)(t_3 - t_2) - x(t_1)x(t_2)(t_1 - t_2) - x(t_1)x(t_3)(t_3 - t_1)\\
&= \frac{(1 - t_2^2)(1 - t_3^2)(1 + t_1^2)(t_3 - t_2) - (1 - t_1^2)(1 - t_2^2)(1 + t_3^2)(t_1 - t_2) - (1 - t_1^2)(1 - t_3^2)(1 + t_2^2)(t_3 - t_1)}{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)(1 + t_3^2)}
\end{aligned}
$$

Arrivés ici on est un peu bloqués, un logiciel de calcul nous donnerait

$$\frac{(1-t_2^2)(1-t_3^2)(1+t_1^2)(t_3-t_2)-(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1+t_3^2)(t_1-t_2)-(1-t_1^2)(1-t_3^2)(1+t_2^2)(t_3-t_1)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)}$$
$$=\frac{2\,(t_2-t_1)\,(t_3-t_1)\,(t_3-t_2)\,(t_2t_3+t_1t_3+t_1t_2+1)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)}$$

Mais, sans logiciel, la factorisation finale est difficile.

On peut être plus astucieux (mais le calcul reste fastidieux)

Idée

Un exercice « classique »sur les déterminants est de montrer que trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{M(t_1)M(t_2)}, \overrightarrow{M(t_1)M(t_3)})
&= \begin{vmatrix} x(t_2)-x(t_1) & x(t_3)-x(t_1) \\ y(t_2)-y(t_1) & y(t_3)-y(t_1) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x(t_2)-x(t_1) & x(t_3)-x(t_1) & x(t_1) \\ y(t_2)-y(t_1) & y(t_3)-y(t_1) & y(t_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x(t_2) & x(t_3) & x(t_1) \\ y(t_2) & y(t_3) & y(t_1) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \dfrac{1-t_2^2}{1+t_2^2} & \dfrac{1-t_3^2}{1+t_3^2} & \dfrac{1-t_1^2}{1+t_1^2} \\ t_2\dfrac{1-t_2^2}{1+t_2^2} & t_3\dfrac{1-t_3^2}{1+t_3^2} & t_1\dfrac{1-t_1^2}{1+t_1^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} 1-t_2^2 & 1-t_3^2 & 1-t_1^2 \\ t_2(1-t_2^2) & t_3(1-t_3^2) & t_1(1-t_1^2) \\ 1+t_2^2 & 1+t_3^2 & 1+t_1^2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} t_1^2-t_2^2 & t_1^2-t_3^2 & 1-t_1^2 \\ t_2-t_2^3-t_1+t_1^3 & t_3-t_3^3-t_1+t_1^3 & t_1(1-t_1^2) \\ t_2^2-t_1^2 & t_3^2-t_1^2 & 1+t_1^2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} (t_1-t_2)(t_1+t_2) & (t_1-t_3)(t_1+t_3) & 1-t_1^2 \\ (t_1-t_2)(-1+t_1^2+t_1t_2+t_2^2) & (t_1-t_3)(-1+t_1^2+t_1t_3+t_3^2) & t_1(1-t_1^2) \\ -(t_1-t_2)(t_1+t_2) & -(t_1-t_3)(t_1+t_3) & 1+t_1^2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1+t_1^2+t_1t_2+t_2^2 & -1+t_1^2+t_1t_3+t_3^2 & t_1(1-t_1^2) \\ -t_1-t_2 & -t_1-t_3 & 1+t_1^2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{2(-1)^{3+1}(t_1-t_2)(t_1-t_3)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} -1+t_1^2+t_1t_2+t_2^2 & -1+t_1^2+t_1t_3+t_3^2 \\ -t_1-t_2 & -t_1-t_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{2(t_1-t_2)(t_1-t_3)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} -1+t_1^2+t_1t_2+t_2^2 & t_1t_3+t_3^2-t_1t_2-t_2^2 \\ -t_1-t_2 & t_2-t_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{2(t_1-t_2)(t_1-t_3)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} -1+t_1^2+t_1t_2+t_2^2 & (t_3-t_2)(t_1+t_2+t_3) \\ -t_1-t_2 & t_2-t_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{2(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_3-t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} -1+t_1^2+t_1t_2+t_2^2 & t_1+t_2+t_3 \\ -t_1-t_2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{2(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_3-t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \left(1-t_1^2-t_1t_2-t_2^2+(t_1+t_2)(t_1+t_2+t_3)\right) \\
&= \frac{2(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_3-t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} (1+t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)
\end{aligned}$$

Finalement les trois points sont alignés si et seulement si $1+t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=0$.

Corrigé de l'exercice 11

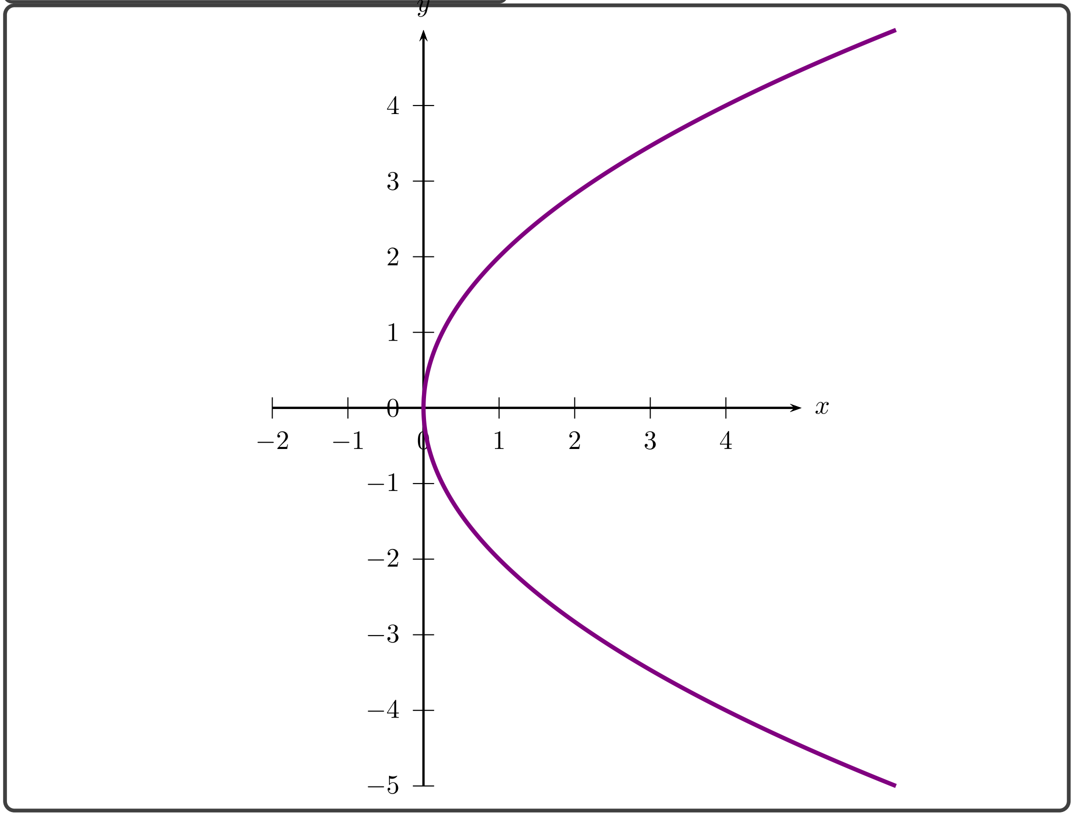
1. On remarque aisément que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $4x(t)-y^2(t)=0$.

Ainsi Γ est incluse dans la courbe d'équation $4x - y^2 = 0$.

Réciproquement, si $M(x, y)$ appartient à la courbe d'équation $4x - y^2 = 0$ alors, en posant $t = \frac{y}{2}$ on a $x = t^2$ et $y = 2t$, ainsi $M(x, y)$ appartient bien à Γ

Finalement Γ est la courbe d'équation $4x - y^2 = 0$.

Figure .20 – Tracé de (Γ) une parabole



2. Soit $M(t)$ un point de Γ. La tangente T_t à Γ en M est la droite passant par $M(t)$ et dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$ est alors orthogonal à cette tangente T_t. T_t admet donc une équation de la forme $x - ty + K = 0$ avec $K \in \mathbb{R}$.

   Comme $M(t) \in T_t$ on a $t^2 - 2t^2 + K = 0$, d'où $K = t^2$.

   Finalement la tangente T_t à Γ en $M(t)$ admet pour équation $x - ty + t^2 = 0$.
3. Soit F le point de coordonnées $(1, 0)$.

   Pour $t \in \mathbb{R}$ la droite T_t admet pour représentation paramétrique $\{(t^2 + 2st, 2t + 2s)\ ,\ s \in \mathbb{R}\}$, Le projeté orthogonal de F sur T_t est l'unique point $H(s) \in T_t$ tel que le vecteur $\overrightarrow{FH(s)}$ soit orthogonal à T_t.

   On cherche donc $s \in \mathbb{R}$ tel que $2t\left(t^2 + 2st - 1\right) + 2(2t + 2s) = 0$.

   On obtient $s = -\frac{2t^3 + 2t}{4(1 + t^2)} = -\frac{t}{2}$ et donc $H(s)$ a pour coordonnées $(0, t)$.

   La podaire de Γ par rapport à $F(1, 0)$ est donc la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) & = 0 \\ y(t) = t \end{cases}$, i.e. la droite d'équation $x = 0$.
4. Pour $t \in \mathbb{R}$ la droite T_t admet pour représentation paramétrique $\{(t^2 + 2st, 2t + 2s)\ ,\ s \in \mathbb{R}\}$, Le projeté orthogonal de O sur T_t est l'unique point $H(s) \in T_t$ tel que le vecteur $\overrightarrow{OH(s)}$ soit orthogonal à T_t.

   On cherche donc $s \in \mathbb{R}$ tel que $2t\left(t^2 + 2st\right) + 2(2t + 2s) = 0$.

On obtient $s = -\dfrac{t^3+2t}{2(t^2+1)}$ et donc $H(s)$ a pour coordonnées

$$\left(t^2 - t\frac{t^3+2t}{t^2+1}, 2t - \frac{t^3+2t}{t^2+1}\right) = \left(\frac{-t^2}{t^2+1}, \frac{t^3}{t^2+1}\right)$$

La podaire de Γ par rapport à $O(0,0)$ est donc la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{-t^2}{t^2+1} \\ y(t) &= \dfrac{t^3}{t^2+1} \end{cases}$.

x est paire et y est impaire, on va donc limiter notre étude à $[0,+\infty[$. On obtiendra le support total par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

Pour $t \geqslant 0$ on a

$$x'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \qquad y'(t) = \frac{t^2\left(t^2+3\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$$

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$-$	
$x(t)$	0	$\searrow$	-1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$+$	

Le point de paramètre 0 est un point singulier.

Au voisinage de $t=0$ on a le développement limité suivant :

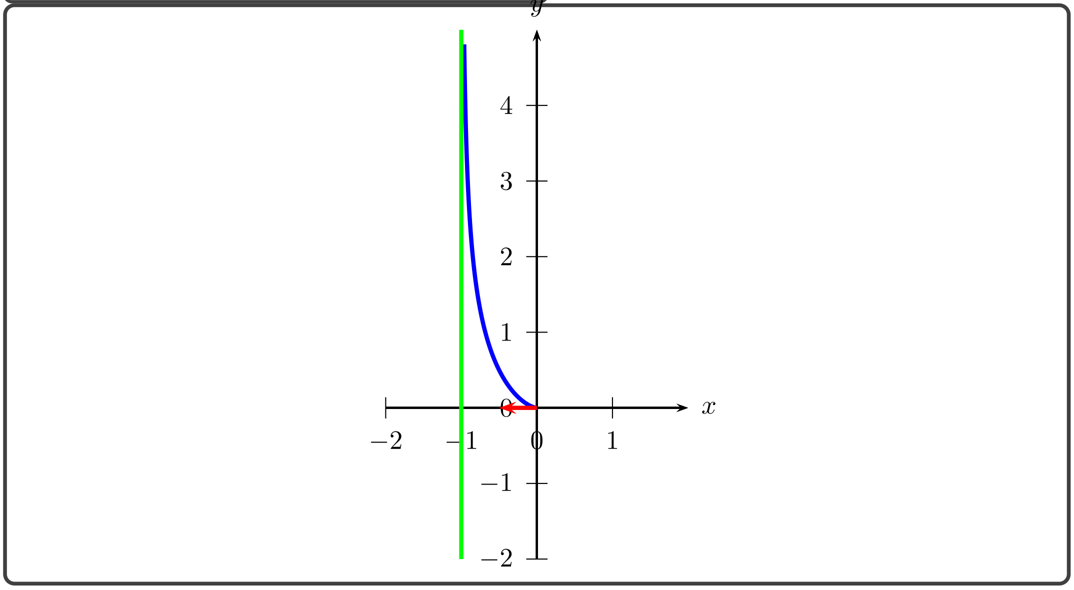
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t\to 0}{=} t^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(t^3)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ étant libre, γ admet en $(0,0)$ un point de rebroussement de première espèce.

On étudie la branche infinie en $+\infty$. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \infty$ la courbe admet comme asymptote la droite d'équation $x = -1$.

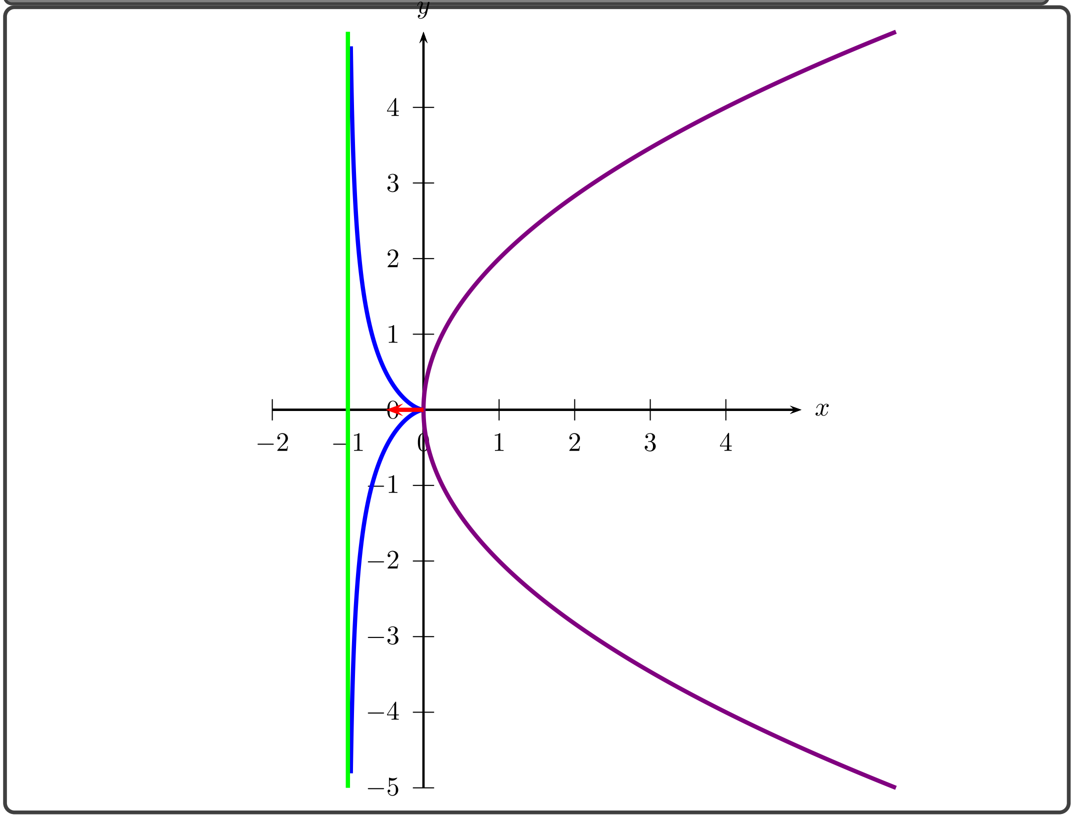
Le tracé de (γ) pour $t \in [0,+\infty[$ donne

Figure .21 – Tracé de (γ) pour $t \in [0, +\infty[$



Puis, par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses

Figure .22 – Tracé de (γ) (en bleu) une cissoïde droite et (Γ) (en violet) une parabole



Corrigé de l'exercice 12

1. x et y sont 2π périodiques donc on peut limiter notre étude à un intervalle de largeur 2π. De plus x est paire et y est impaire donc on peut limiter notre étude à $[0, \pi]$ et on obtiendra le support complet par symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Ox).

   x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$, on a

   $$x'(t) = 2\sin(t)\cos(t) \qquad y'(t) = \cos(t)+\cos^2(t)-\sin^2(t) = 2\cos^2(t)+\cos(t)-1 = (2\cos(t)-1)(\cos(t)+1)$$

   On en déduit le tableau des variations conjointes

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0		$+$		0	$-$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0		$-$		0

2. La courbe n'a pas de branches infinies.
3. On a un point singulier au paramètre π.

   Pour $t \in R$, notons $s = t - \pi$, on a alors

$$
\begin{aligned}
x(\pi + s) &= \sin(\pi + s)^2 \\
&= \sin(s)^2 \\
&\underset{s \to 0}{=} \left(s - \frac{s^3}{6} + o(s^4)\right)^2 \\
&\underset{s \to 0}{=} s^2 - \frac{s^4}{3} + o(s^4)
\end{aligned}
$$

   Et

$$
\begin{aligned}
y(\pi + s) &= \sin(\pi + s) + \frac{\sin(2\pi + 2s)}{2} \\
&= -\sin(s) + \frac{\sin(2s)}{2} \\
&\underset{s \to 0}{=} -s + \frac{s^3}{6} + \frac{2s - \frac{8s^3}{6}}{2} + o(s^3) \\
&\underset{s \to 0}{=} -\frac{s^3}{3} + o(s^3)
\end{aligned}
$$

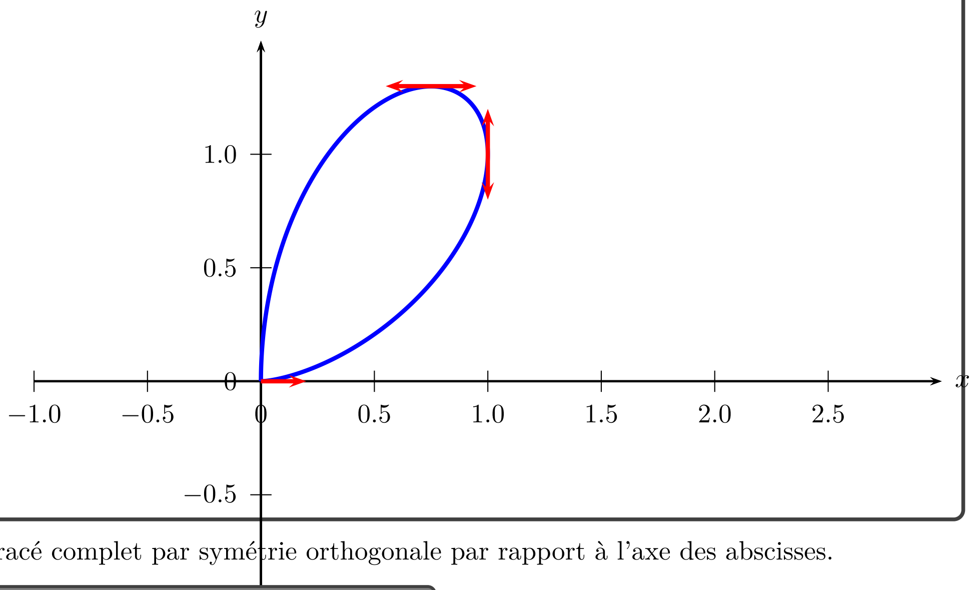
   Ainsi

$$
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t \to \pi}{=} \frac{(t-\pi)^2}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(t-\pi)^3}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + o(s^3)
$$

   La famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ est libre donc le point de paramètre π est donc un point de rebroussement de première espèce. La tangente en ce point est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

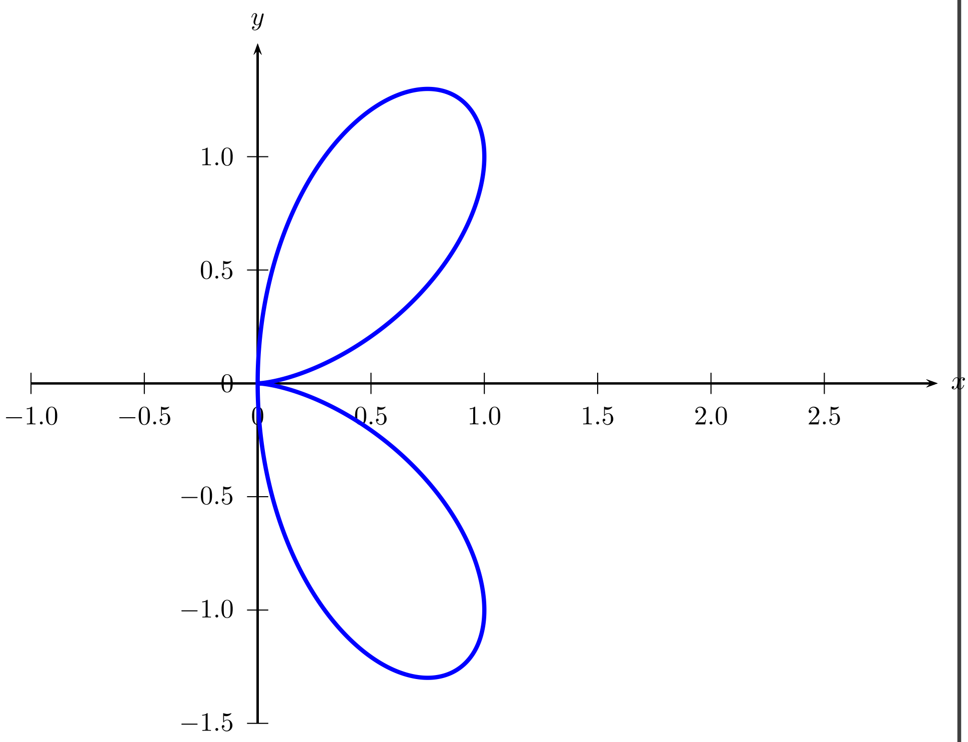
   On obtient le tracé suivant sur $[0, \pi]$

Figure .23 – Tracé sur $[0, \pi]$



Puis le tracé complet par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

Figure .24 – Tracé de $\mathcal{C}$, un bifolium droit



4. $\overrightarrow{OM_1}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \sin^2(t) \\ (1+\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \sin^2(t+\pi) \\ (1+\cos(t+\pi))\sin(t+\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2(t) \\ -(1-\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix}$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2} \rangle &= \sin(t)^4 - \sin^2(t)(1+\cos(t))(1-\cos(t)) \\
&= \sin(t)^2 \left(\sin(t)^2 - (1-\cos(t)^2)\right) \\
&= \sin(t)^2 \left(\sin(t)^2 - \sin(t)^2\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont donc bien orthogonaux.

5. On a
$$X(t) = \frac{x(t)+x(t+\pi)}{2} = \sin(t)^2$$
Et
$$Y(t) = \frac{y(t)+y(t+\pi)}{2} = \sin(t)\left((1+\cos(t)) - (1-\cos(t))\right) = \sin(t)\cos(t)$$

6. Pour $t \in \mathbb{R}$ on a
$$\begin{aligned}
\left(X(t) - \frac{1}{2}\right)^2 + Y(t)^2 &= \left(\sin(t)^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \sin(t)^2\cos(t)^2 \\
&= \sin(t)^4 - \sin(t)^2 + \frac{1}{4} + \sin(t)^2\cos(t)^2 \\
&= \sin(t)^2(1-\cos(t)^2) - \sin(t)^2 + \frac{1}{4} + \sin(t)^2\cos(t)^2 \\
&= \sin(t)^2 - \sin(t)^2\cos(t)^2) - \sin(t)^2 + \frac{1}{4} + \sin(t)^2\cos(t)^2 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi, tout point de (D) vérifie l'équation cartésienne $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. (D) est donc inclus dans le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Réciproquement soit $M(x,y)$ un point de ce cercle, il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}\sin(\theta)$

Posons $t = \frac{\pi - \theta}{2}$, on a alors
$$x = \frac{1}{2}\cos(\pi - 2t) + \frac{1}{2} = \frac{1-\cos(2t)}{2} = \sin^2(t)$$
Et
$$y = \frac{1}{2}\sin(\pi - 2t) = \frac{1}{2}\sin(2t) = \sin(t)\cos(t)$$

Ainsi, tout point du cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ appartient à (D).

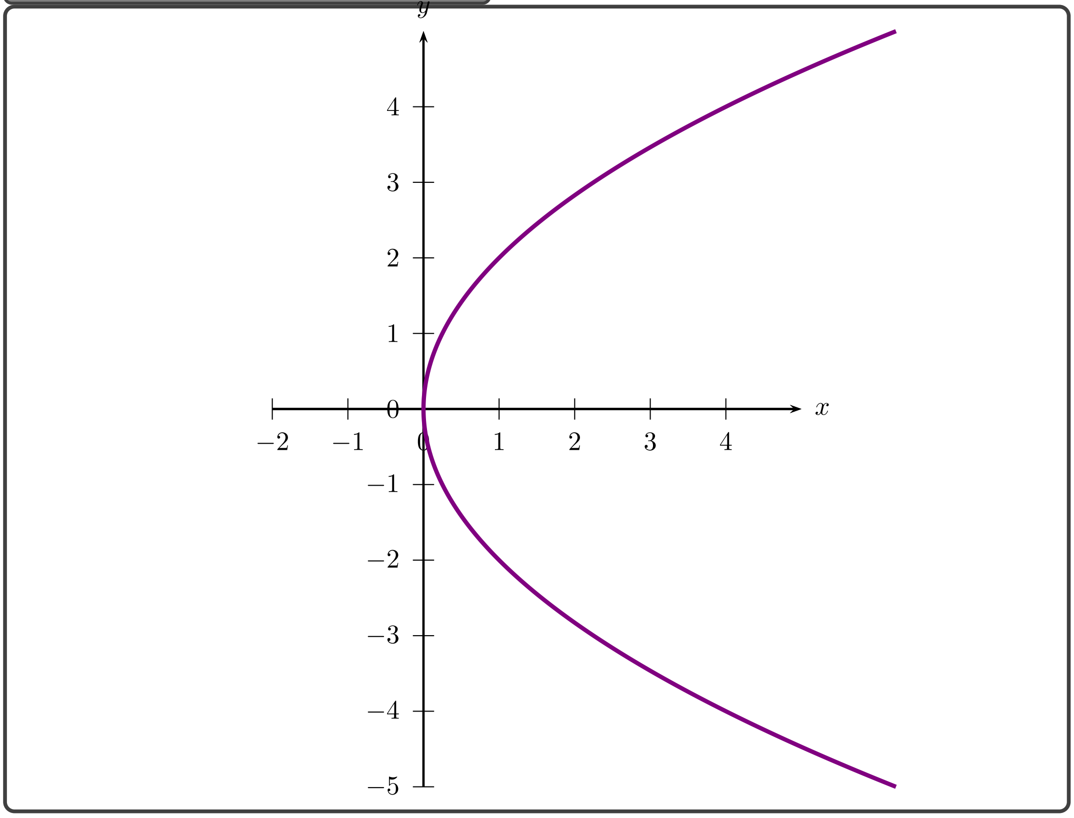
Finalement (D) est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 13

1. On reconnaît facilement que $(\mathcal{P})$ est la parabole d'équation $y^2 - 4x = 0$

Parabole
C'est d'ailleurs la même parabole qu'à l'exercice 11

Figure .25 – Tracé de $\mathcal{P}$ une parabole



2. La tangente T_t à $\mathcal{P}$ au point de paramètre t est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$ est orthogonal à T_t. Ainsi T_t a une équation de la forme $x - ty + K = 0$.

   Or $M(t) \in T_t$, ainsi $\dfrac{t^2}{2} - t^2 + K = 0$, d'où $K = \dfrac{t^2}{2}$.

   T_t a donc pour équation $x - ty + \dfrac{t^2}{2} = 0$.

3. Pour $t \in \mathbb{R}$ la droite T_t admet pour représentation paramétrique $\left\{ \left(\dfrac{t^2}{2} + st, t + s \right) \ , \ s \in \mathbb{R} \right\}$, Le projeté orthogonal de F sur T_t est l'unique point $H(s) \in T_t$ tel que le vecteur $\overrightarrow{AH(s)}$ soit orthogonal à T_t.

   On cherche donc $s \in \mathbb{R}$ tel que $t\left(\dfrac{t^2}{2} + st\right) + t + s - 1 = 0$.

   On obtient $s = \dfrac{2 - t^3 - 2t}{2(1+t^2)}$ et donc $N(t)$ a pour coordonnées

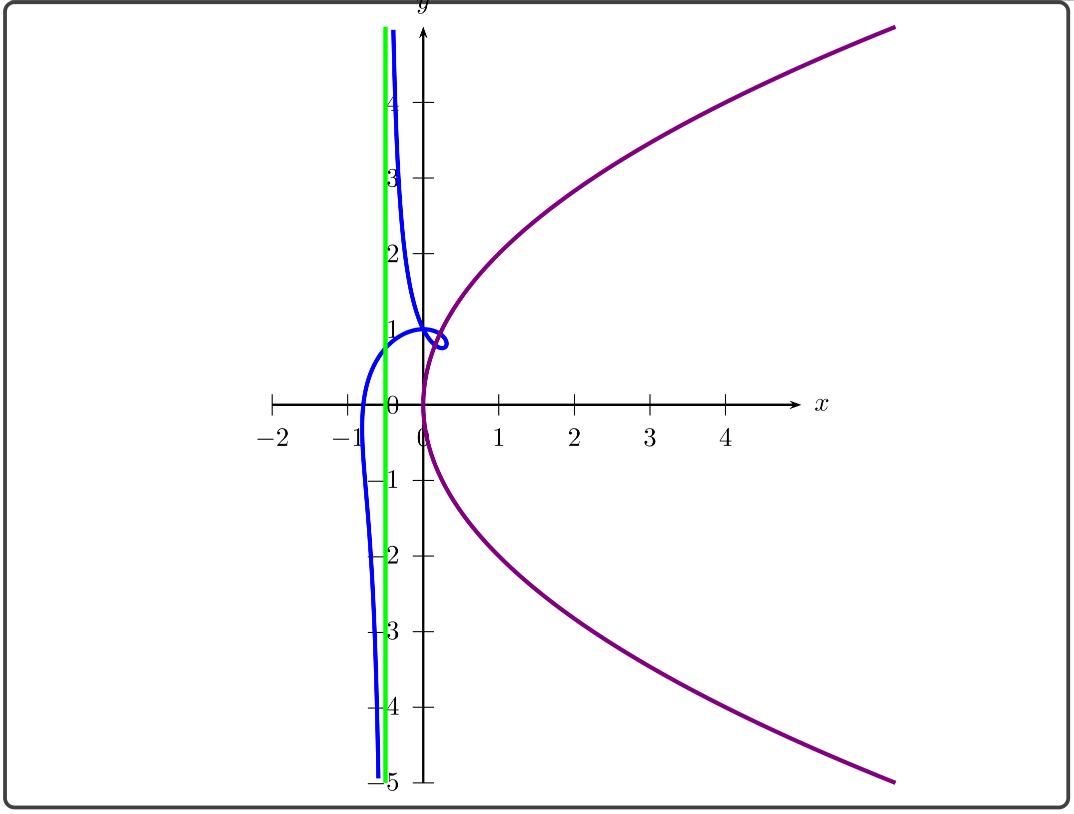
$$\left(\frac{t^2}{2} + t\frac{2 - t^3 - 2t}{2(1+t^2)}, t + \frac{2 - t^3 - 2t}{2(1+t^2)} \right) = \left(\frac{2t - t^2}{2(1+t^2)}, \frac{t^3 + 2}{2(1+t^2)} \right)$$

4. Notons $N(t) = (X(t), Y(t))$. On a $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} X(t) = -\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} Y(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to -\infty} Y(t) = -+\infty$.

   Ainsi, la courbe décrite par $N(t)$ admet pour asymptote lorsque t tend vers $\pm\infty$ la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

   Le tracé n'était pas demandé mais on peut tout de même le donner

Figure .26 – Tracé de $\mathcal{P}$ (en violet) et de la courbe décrite par $N(t)$ (en bleu), une hypercissoïde



Corrigé de l'exercice 14

1. La fonction $t \mapsto \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\pi + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Elle prend des valeurs strictement positives sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$.

   Ainsi Γ est définie sur $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$.

2. x et y sont π périodiques, ainsi on limitera notre étude à $]0, \pi[$.
   De plus, pour $t \in]0, \pi[$ on a

$$\begin{aligned} x(\pi - t) &= \cos(\pi - t) + \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)\right) \\ &= -\cos(t) + \ln\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\right) \\ &= -\cos(t) - \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ &= -x(t) \end{aligned}$$

   et $y(\pi - t) = y(t)$.

   Ainsi, on limitera notre étude à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on obtiendra le support complet de Γ par symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Oy).

   x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition et, pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\sin(t) + \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \tan\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \\ y'(t) &= \cos(t) \end{aligned}$$

Posons $u(t) = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, on a alors

$$x'(t) = \frac{-2u(t)}{1+u^2(t)} + \frac{1+u^2(t)}{2u(t)} = \frac{-4u(t)^2+1+2u^2(t)+u^4(t)}{2u(t)(1+u^2(t))} = \frac{(u^2(t)-1)^2}{2u(t)(1+u^2(t))}$$

Comme u est strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on constate de plus que x' est positive et ne s'annule qu'en $t = \frac{\pi}{2}$

Les point stationnaires sont les points $M(t)$ où $x'(t) = y'(t) = 0$.

Sur notre domaine restreint le seul point stationnaire est le point de paramètre $\frac{\pi}{2}$.

Pour $s \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ on a

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{2}+s\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}+s\right) &\\ &= \cos(s) \\ &= 1 - \frac{s^2}{2} + o(s^3) \end{aligned}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{s}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{s}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{1+\tan\left(\frac{s}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{s}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{2}+s\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}+s\right) + \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{s}{2}\right)\right) \\ &= -\sin(s) + \ln\left(\frac{1+\tan\left(\frac{s}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{s}{2}\right)}\right) \\ &= -\sin(s) + \ln\left(1+\tan\left(\frac{s}{2}\right)\right) - \ln\left(1-\tan\left(\frac{s}{2}\right)\right) \\ &\underset{s\to 0}{=} -s + \frac{s^3}{6} + o(s^3) + \ln\left(1+\frac{s}{2}+\frac{s^3}{24}+o(s^3)\right) - \ln\left(1-\frac{s}{2}+\frac{s^3}{24}+o(s^3)\right) \\ &\underset{s\to 0}{=} -s + \frac{s^3}{6} + \frac{s}{2} + \frac{s^3}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{2}+\frac{s^3}{24}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{s}{2}+\frac{s^3}{24}\right)^3 - \left(-\frac{s}{2} - \frac{s^3}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{2}+\frac{s^3}{24}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{s}{2}+\frac{s^3}{24}\right)^3\right) + o(s^3) \\ &\underset{s\to 0}{=} -s + \frac{s^3}{6} + \frac{s}{2} + \frac{s^3}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{2}+\frac{s^3}{24}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{s}{2}+\frac{s^3}{24}\right)^3 + \frac{s}{2} + \frac{s^3}{24} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{2}+\frac{s^3}{24}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{s}{2}+\frac{s^3}{24}\right)^3 + o(s^3) \\ &\underset{s\to 0}{=} \frac{s^3}{3} + o(s^3) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + o\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre, ainsi le point de paramètre $\frac{\pi}{2}$ est un point de rebroussement de première espèce.

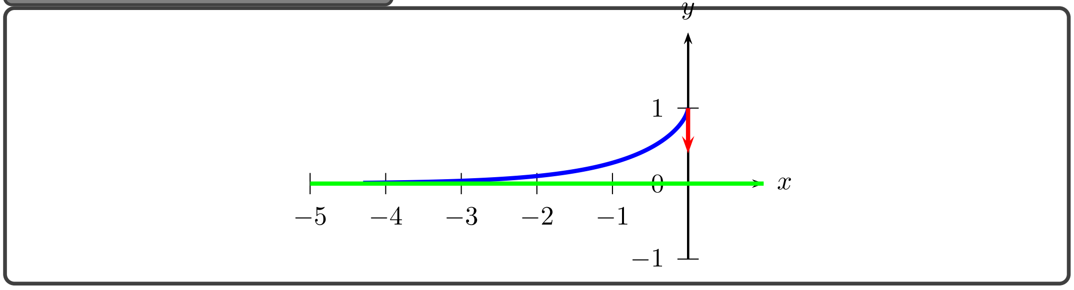
3. On dresse le tableau des variations conjointes

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	$\|$	$+$	0
$x(t)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1
$y'(t)$		$+$	0

La courbe admet une branche infinie lorsque t tend vers 0. Il s'agit d'une asymptote d'équation $y = 0$

4. On trace l'allure pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

Figure .27 – Tracé sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$



On obtient le support complet par symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Oy)

Figure .28 – Tracé de Γ, une tractrice